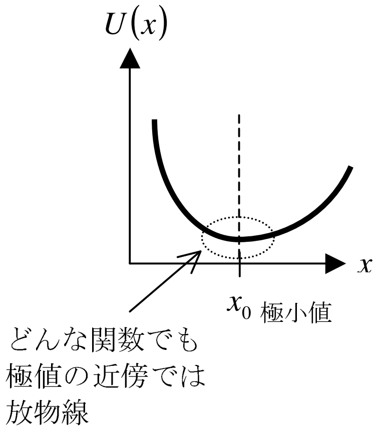
0 前回

力学的相似 ～ L が定数倍になるように時間や座標を伸縮

⇒ ポテンシャルが座標の同次関数では可能「等時性」

⇔ 振り子、振幅が大きい場合力学的相似が使えない。解は楕円関数

※本日のゴール ― 外力と摩擦のラグランジアン



１‘ 調和振動が重要な理由

ポテンシャルを極小値 x_0 の周りで展開したとき必ず、

2 次の項から始まる(極値なので一次はゼロ)

$$U(x) = U(x_0) + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

⇒振幅が小さければどんなポテンシャルでも調和振動

座標の原点を x_0 にとれば、$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$

運動方程式は、$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -kx - m\ddot{x} = 0$, $\therefore \ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 　但し $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

一般解は、 $x = A\cos(\omega t + \phi)$, ($A$ と ϕ は積分定数)。

又は、 $x = Ae^{i\omega t + \phi}$ としてもそのまま微分方程式を満たします

(∵Im が sin でこれも満たすから)

ですから、最後に実部 Re を取ることにすれば途中の計算が簡単になります

2 外力(≡強制力)がある場合の振動

仮想的なポテンシャル$U_f(x,t) = -xf(t)$というものを考えましょう。

⇒あくまで仮想的なもの。時間変化したりする変なポテンシャルです

一般に現実のポテンシャルと力の関係は、$F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$

仮想ポテンシャルと外力が、この関係を満たしているか調べてみると、

U_fを単純に座標で微分すれば、$-\dfrac{\partial U_f(x,t)}{\partial x} = -\left(-\dfrac{\partial xf(t)}{\partial x}\right) = f(t)$

と確かに外力になってくれます。

よって、$U_f(x,t) = -xf(t)$をラグランジアンに付け加えて

$L = L_0 - U_f(x,t) = L_0 + xf(t)$とすればよさそう。

3 時間にあらわに依存するラグランジアン

$\boxed{\text{重要}}$ この$U_f(x,t) = -xf(t)$は時間に依存していますが、このように座標や速さではなく、最初から決まっている時間依存性を持つことを「時間にあらわに(explicit)依存する」といいます。このラグランジアンによるE.-L.方程式は、

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L + xf(t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L + \overbrace{xf(t)}^{\text{消える}}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + f(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + f(t) = 0$$

ですから、確かに「力」の項が加わることになります

この事実(＝外力はE.-L.に足せば良い)は後で何回もで使います

４摩擦がある場合

摩擦は力学ではない？— 摩擦は、運動を熱に変える過程ですから、本来は力学の枠組みを超えた話。本当は、量子力学、統計力学、熱力学、流体力学が必要。

力学で扱える摩擦は、原因は問わずに、

「近似的に $f_{\mathrm{T}} = -\alpha\dot{x}$ と書けるような摩擦力」

という場合だけです。その場合、$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ 2\lambda = \alpha/m \\ \omega_0^2 = k/m \end{cases}$ となります。

５摩擦のある振動の問題を解く

これは線形微分方程式で非斉次項がありませんから簡単に解けます。

一番簡単な解き方は $x = e^{rt}$ とおいてしまえば、

⇒最終的に解が求まった段階で $\mathrm{Re}\, x$ を答にします

※こうやって良い理由は方程式が「線形」だからです。

$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ が解ならば、両者の和 $e^{i\omega t}$ も解だからです。

⇔ $x^2,\ x^3$ とかが入って線形でないと、こうは行きません。

$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$　という「特性方程式」を得るので、r について

$$r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \lambda \pm \omega \qquad \text{但し}\ \omega \equiv \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

と解けば一般解は、$c_\pm$ を定数として、$x = \mathrm{Re}\left(c_+ e^{r_+ t} + c_- e^{r_- t}\right)$ となります。これは、

・$\lambda^2 > \omega_0^2$ の場合は解が実数なので指数関数です。

・$\lambda^2 < \omega_0^2$ の場合、$r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm i\sqrt{\left|\omega_0^2 - \lambda^2\right|} \equiv -\lambda \pm i\left|\omega\right|$

と、解に虚数部分を含みますから減衰振動です。

場合をしなくとも、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ さえ知っていれば、下式のように統一して記述できます。

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{Re}\left(C_+ e^{-r_+ t} + C_- e^{-r_- t}\right) \xrightarrow{\text{場合分けすると}} \left\{\begin{array}{ll} C\,e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \phi) & \text{if } \lambda^2 < \omega_0^2 \\ (C_1 + tC_2)e^{-\lambda t} & \text{if } \lambda^2 = \omega_0^2 \\ C_1 e^{-(\lambda+\omega)t} + C_2 e^{-(\lambda-\omega)t} & \text{if } \lambda^2 > \omega_0^2 \end{array}\right\}$$

統一的に美しく書けるということはとても大事なことです。

しかし、念のため、後者の場合について三角関数に直しておくと

$\therefore \mathrm{Re}\,x = e^{-\lambda t}\left(c_+^R \cos\omega t - c_+^I \sin\omega t + c_-^R \cos\omega t + c_-^I \sin\omega t\right)$ となるので、

$c_1 = c_+^R + c_-^R$, $c_2 = c_-^I - c_+^I$ とおけば、

$= e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right) = e^{-\lambda t} A \sin(\omega t + \phi)$

但し $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

というわかりやすい形の一般解を得ます。

このように、摩擦があると「動きにくくなって」振動数が ω_0 から減ります。

これは直感と一致します。

このように直感と一致するかどうか確認することは大変重要です。もちろん、直感と一致しない場合がありますが、そういうときは、より一層重要です。

6　重根の場合

なお、ちょうど$\lambda = \pm\omega_0$の場合は$r_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \lambda \pm \underset{=0}{\omega} = \lambda$と重根となるので素人には$ce^{-\lambda t}$という一つの解しか見えませんが、少し注意が必要です。

$\lambda \to \pm\omega_0$の極限 (すなわち$\omega \equiv \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$が非常に小さい)を考えます。

ここで、$c_+ = -c_-$と置いてみると

$x = c_+\left(e^{+\omega t} - e^{-\omega t}\right)e^{-\lambda t} \cong c_+\left(1 + \omega t - 1 + \omega t\right)e^{-\lambda t} = 2c_+\omega t e^{-\lambda t}$

と、$\omega \to 0$の極限で消えてしまいます。

だから一つしかないようにみえるのです。

よって消えないようにするために任意定数$c_+ = -c_-$を大きくしてやります。

つまり、$c_+ = \dfrac{c_+'}{2\omega}$と置けば、もう一つの解、

$\lim_{\omega \to 0} c_+ \cdot \left(e^{+\omega t} - e^{-\omega t}\right) = 2c_+\omega t e^{-\lambda t} = c_+' t e^{-\lambda t}$を得ます。

この関数は、$x(t \to 0) \approx t$で、$x(t \to \infty) \approx e^{-\lambda t}$であり、さらに微分してみれば、途中の$t = 1/\lambda$で極大をとることがわかります。

7　摩擦と外力がある場合の振動

$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$に外力の項$f\cos\omega_1 t$を加えると$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{f}{m}\cos\omega_1 t$です。

この式は、$\mathrm{Re}\left(\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{f}{m}e^{i\omega_1 t}\right)$と等価ですから、解$x$は最後に実部$\mathrm{Re}\,x$を取ることにすると、$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{f}{m}e^{i\omega_1 t}$を解けばよいことになります。

＊注 ―もちろん、虚部も微分方程式を満たしている。

―微分演算によって実部と虚部が入り混じるが、これは、微分によって sin と cos が交代することを意味しているので OK

―繰り返すが、こういうことが出来るのは線形方程式のみ。

8 非斉次微分方程式の解法

このような微分方程式 $\underbrace{f(y)}_{\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x} = \underbrace{g(t)}_{\frac{f}{m}e^{i\omega_1 t}}$ の解法は、演算子法とかいろいろありますが、オーソドックスなのは、

1) $f(y)=g(t)$ の特殊解(積分定数を含まなくとも良い)を見つける

2) $f(y)=0$ の一般解(必要数の積分定数を含んだ)を求める

$\Rightarrow$ n 階微分方程式は n 個の任意定数を含みます

の和として求まることが判っています。

2)は簡単に求まります(さっきやりました)が、1)の特殊解はどうしたらよいのでしょうか。一瞬、途方にくれてしまうかもしれませんが、右辺は振動する項ですから、とにかく同じ振動数の解があるはずです。そこで、ともかく $x=Be^{i\omega_1 t}$ と置いて代入すると、$-\omega_1^2 B+2i\lambda\omega_1 B+\omega_0^2 B=\dfrac{f}{m}$ となりますから、

$B=\dfrac{f}{m\left(\omega_0^2-\omega_1^2+2i\lambda\omega_1\right)}$ を得ます。よって特解は $x=\mathrm{Re}\,Be^{i\omega_1 t}$ です。

注）B は任意定数ではなく、値が初期条件とは無関係に

決まってしまう定数です。

この解には二つの積分定数が含まれていません(B_0 も β も与えられたパラメタ $f, m, \lambda, \omega_0, \omega_1$ で決まってしまいます)から、あくまで特殊解です。一般解はこれに、外力が無い場合の一般解 $Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)$ を足して、

$Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)+B_0\cos(\omega_1 t+\beta)$ です。なお、積分定数は A,ϕ です。

なお、初項は時間と共に減衰して行きますから、時間が十分経った後では結局第二項(特解～外力に比例した振動)のみが残るということになります。

この第二項(時間が十分経過した後の解)振幅の大きさを調べてみます。B の分母を見ると $B=\dfrac{f}{m\left(\omega_0^2-\omega_1^2+2i\lambda\omega_1\right)}$ ですから、$\omega_0 \cong \omega_1$ に近いところで大きくなりそうであるということがわかります。つまり、バネや振り子の共振周波数に近い周波数で揺すってやれば大きく揺れるということで、当たり前(直感と一致)のことです。

よって、解と強制力の両者は比例し、比例係数を $\chi(\omega_1)$ と書くと

$\underbrace{Be^{i\omega_1 t}}_{\text{解}}=\chi(\omega_1)\underbrace{fe^{i\omega_1 t}}_{\text{強制力}}$ となります。この $\chi(\omega)=\dfrac{B}{f}=\dfrac{\text{ゆれ振幅}}{\text{外力}}$ を「感受率」と言います。ここで、$B=B_0e^{i\beta}$ と、絶対値と位相因子に分けて書けば、

$x=\mathrm{Re}\left(B_0e^{i(\omega_1 t+\beta)}\right)=B_0\cos(\omega_1 t+\beta)$ となるので、

感受率＝ゆれ易さ B_0 　と、　ゆれの遅れ β 　の意味を持つことがわかります。

9　振幅の周波数依存性

摩擦が小さくて$\lambda < \omega_0$、かつ、共鳴点の近く$\delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, $|\delta\omega| \ll |\omega_0|$では

$$B = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2i\lambda\omega_1\right)} = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - (\omega_0 + \delta\omega)^2 + 2i\lambda(\omega_0 + \delta\omega)\right)}$$

となるので、高次の微小量($\sim \delta\omega^2$、$\lambda\delta\omega$)を捨てると、

$$B \cong \frac{f}{m(-2\omega_0\delta\omega + 2i\lambda\omega_0)}$$

$$= \frac{-f}{2m\omega_0(\omega_1 - \omega_0 - i\lambda)}$$ となります。

＊振幅の絶対値は、$B_0 = |B| = \dfrac{f}{2m\omega_0\sqrt{\delta\omega^2 + \lambda^2}}$

この近似の範囲では、$\delta\omega = 0$、すなわち、外力の振動が共鳴点と完全に一致したところで振幅が最大になることがわかります。もう少し近似の精度を上げると最大振幅を与える外力の振動数はわずかに変化します。

振幅が大きくなるのは、エネルギー保存則から、「外力が仕事をした」ということです。外力fの単位時間あたりの仕事は$= f\,\dot{x}$ですから、

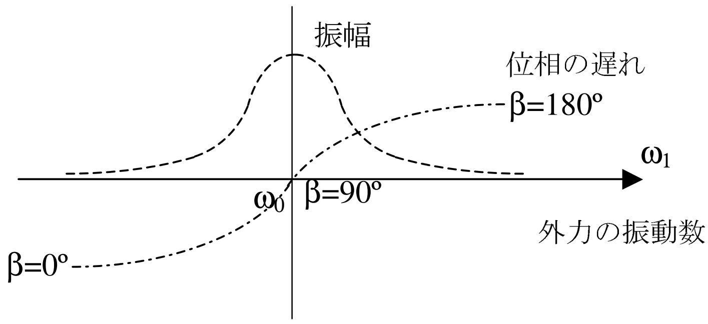
＊外力が一周期の間にする仕事 $\left\langle \underbrace{\cos\omega t}_{\text{外力}} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \beta)}_{\text{質点の速度}} \right\rangle_{\text{一周期}}$

となります。ここで一周期の間の平均の定義は、$\langle\cdots\rangle_{\text{一周期}} = \dfrac{1}{T}\int_0^T dt\cdots$です。

もし、$\beta = 0$だといくらゆすっても仕事をしないのです。

＊振動の位相の遅れ（$B_0 e^{i\beta}$のβ）は、$\tan\beta = \dfrac{\mathrm{Re}\,B}{\mathrm{Im}\,B} = \dfrac{-\lambda}{\omega_1 - \omega_0}$

ですから、$\beta = 90$のときに、仕事が一番多くなされ、エネルギー吸収が起こり、振幅が最大になります。



１０　箱の中の調和振動子

外から見えないとしたとき、その振動子の性質を知るには、箱を揺すってエネルギーの吸収が一番大きくなる所を調べてやればよいということになります。

結晶あるいは、分子の中の原子や電子は、つりあいの位置を中心として振動しています。この振動は、近似的には調和振動とみなすことができます。バネ定数にあたるものは、電気的な力(クーロン力)などです。結晶を電気的に揺すってやる(電磁波を照射)と、共鳴点の近くで、エネルギーの吸収が大きくなります。このようにして、結晶の中の電子や原子の性質を知る手段として応用することが出来ます。

電磁波を物質に入射すると、電子やイオンと相互作用して、エネルギーが吸収されたり、速度が変わったりします。そのため、屈折率($n \propto \sqrt{\varepsilon}$)が周波数によって変わることがあります。これが、プリズム分光の原理です。

【今週の出席】―調和振動子のポテンシャルkx^2に微小な項αx^3やβx^4が加わったとしよう。そして、その解がf, gと二つ求まったとしよう。もちろん、$f \neq g$

である。問題：$f+g$ が解でないことをしめせ。

【参考】

１１散逸関数

ここで、$F=\dfrac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$ とおくと $f_{\mathrm{T}}=-\dfrac{\partial F}{\partial\dot{x}}$ と書けます。

F を散逸関数と呼びます。この表式は、仮想ポテンシャルと摩擦の関係に似ていますが、座標微分ではなく、速度の微分になっています。未だ F の意味はさっぱりわかりませんが、あとでエネルギーの散逸を表わすことを説明します。

ラグランジュ方程式は前項でやったように、「力」の項を加えれて、

$\dfrac{\partial L_0}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_0}{\partial\dot{x}}\right)+f_{\mathrm{T}}=0$ となります

運動方程式は $-(m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx)=0$ となります。

注—摩擦があるラグランジアンそのものは書けません！！

式を簡単にするために、m で割ってやり、$2\lambda=\dfrac{\alpha}{m}$，$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ とおけば、

$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$　です。

１２ 減衰が小さい場合（$\lambda^2<\omega_0^2$）の減衰率

運動方程式 $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$（但し $\lambda\equiv\dfrac{\alpha}{2m}$）の解について、

1 周期 $T=2\pi/\omega=2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ の振動の間のエネルギーの減少率を調べてみましょう。但し、摩擦は非常に小さい（$\lambda\ll\omega$）とします。

前に書いたように摩擦で振動数は減少しますから $\omega < \omega_0$ です。

１３運動エネルギー

$\dot{x} = Ae^{-\lambda t}\left(-\lambda \sin(\omega t + \phi) + \omega\cos(\omega t + \phi)\right)$ より、

今の条件では第一項が無視できて $\dot{x} \cong A\omega e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi)$ となります。よって、

$$\left\langle E \right\rangle_{\text{一周期での平均}} = \int_t^{t+T} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \Big/ \int_0^T dt \cong \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{mA^2\omega^2}{2} e^{-2\lambda t}\cos^2(\omega t + \phi) dt$$

ここで λ が非常に小さいので周期内で $e^{-2\lambda t}$ は変化しないとして積分から出すと、

$$\cong \frac{mA^2\omega^2}{2T} e^{-2\lambda t} \underbrace{\int_t^{t+T} \cos^2(\omega t + \phi) dt}_{T/2}$$ となり、 $$\because \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{\cos(2(\omega t + \phi)) + 1}{2}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda t}}{T}\frac{mA^2\omega^2}{2}\frac{T}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{4}e^{-2\lambda t}$$

１４ ポテンシャルエネルギー

同様に

$$\left\langle E_{pot} \right\rangle_{\text{周期}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} dt \cong \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{e^{-2\lambda t}}{T}\frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\frac{T}{2}$$
$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}e^{-2\lambda t} \cong \frac{mA^2\omega^2}{4}e^{-2\lambda t}$$

よって、先ほどの運動エネルギーの減少率と足し合わせれば二倍になって、

$$\left\langle E \right\rangle_{\text{周期}} = \frac{mA^2\omega^2}{2}e^{-2\lambda t}$$

よって、エネルギーの減少の速さは、

$$\frac{d}{dt}\langle E\rangle_{周期} = -mA^2\omega^2\lambda e^{-2\lambda t}$$

一方、先ほど定義した散逸関数$F=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$は、(念のため、$f_{\mathrm{T}}=-\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}$, $2\lambda=\frac{\alpha}{m}$)

$F=m\lambda\left(A\omega e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)\right)^2$ となり、これも 1 周期内で平均すれば、

$\langle F\rangle_{周期}=\frac{mA^2\omega^2\lambda}{2}e^{-2\lambda t}$となり、結局、

$\frac{d}{dt}\langle E\rangle_{周期}=-2\langle F\rangle_{周期}$となることがわかります。

つまり、散逸関数は、エネルギーの減少の度合いを表わしているのです。

１５　散逸関数の一般論

実はこれは一般的に証明することができます。外力が無い場合、$L=L(q,\dot{q})$であることに注意し、E と L の関係$E=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{x}-L$ (ラグランジアンが時間に寄らない場合の保存量が E)を思い出せば、

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-L\right)=\ddot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\underbrace{-\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\ddot{x}}_{-\frac{d}{dt}L(x,\dot{x})}$$

第 1 項と 4 項がキャンセルして、

$$=\dot{x}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}\right)$$

ですが、ラグランジュ方程式から、$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)+f_{\mathrm{T}}=0$ですから結局、

$=\dot{x}f_{\mathrm{T}}$　となります。

よって、$\frac{dE}{dt}=\dot{x}f_{\mathrm{T}}=\dot{x}(-\alpha\dot{x})=-\alpha\dot{x}^2=-2F$　を得ます。

これは、$F=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2=\frac{1}{2}\underbrace{\alpha\dot{x}}_{f_\mathrm{T}}\cdot\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\left(f_\mathrm{T}x\right)}_{W}=\frac{1}{2}\dot{W}$ ということです

（但し f_T はゆっくりとしか変化しないので定数とみなした）。

１６ 強制振動では摩擦があっても振幅が減衰しない理由

強制振動の解で、摩擦があるにも関わらず、振幅 B_0 は時間に対して一定なのはなぜでしょうか。これは、外力から、エネルギーが供給されたことを意味しています。この供給量は、エネルギーの減少分を補うわけですから、3) での議論 $\frac{d}{dt}\langle E\rangle_{\text{周期}}=-2\langle F\rangle_{\text{周期}}$ とを使い、その他 $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$、$2\lambda=\frac{\alpha}{m}$、散逸関数の定義 $F=\frac{\alpha\dot{x}^2}{2}$ などに注意すれば、

単位時間あたりの外部供給エネルギー $P=-\frac{d}{dt}\langle E\rangle=2\langle F\rangle=2\left\langle\frac{\alpha\dot{x}^2}{2}\right\rangle=2\left\langle\lambda m\dot{x}^2\right\rangle$

となります。

ここで、$x=B_0\cos(\omega_1t+\beta)$ ですから、$\dot{x}=-B_0\omega_1\cos(\omega_1t+\beta)$ となり、

一周期分の外部供給エネルギーは、

$$P=2\lambda m\left\langle\dot{x}^2\right\rangle=2\lambda mB_0^2\omega_1^2\left\langle\cos^2\right\rangle=\lambda mB_0^2\omega_1^2$$

$$=\lambda\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\frac{f^2}{4m\left(\lambda^2+\delta\omega^2\right)}\cong\frac{f^2\lambda}{4m\left(\lambda^2+\delta\omega^2\right)}$$

これは、共鳴点 $\omega_0=\omega_1-\delta\omega$ を中心とする、幅 λ 程度のローレンツ曲線です。

なお、外力と、質点の運動 x との位相差 β が 90 度の時に、エネルギーの吸収が最大になる、という点に違和感を持った人が居るかも知れませんが、もっとも

です。例えば、交流による消費電力は、電圧と電流の位相差が一致したところで最大で、90 度のところでは零であるからです。

これは、外力 f の単位時間あたりの仕事は、外力×単位時間あたりの移動距離であることを思い出せば、$= f\,\dot{x}$ ですから、f の位相と比較すべきは x ではなく $\dot{x}$ であることに気がつきます。