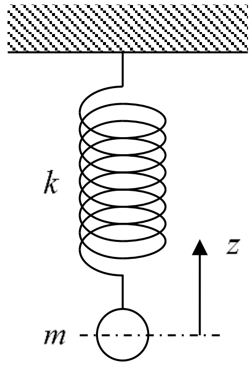
※全ての問題で、途中の式と説明とを必ず書くこと。



1. 図のように重力場中で、バネ定数 k のバネの先につけられた質量 m の質点のラグランジアンを書こう。但し、質点の座標を z とし上向きを正とします。
ヒント—重力ポテンシャルも忘れずに。

2. 座標変換 $z \to z + C$ によって、ラグランジアンを簡単な形にしよう。
ヒント—完全平方になるよう、定数 $C = mg/k$ と置くのです。

3. オイラー・ラグランジュ方程式を解こう。ヒント—二階微分方程式なので積分定数は二つ。

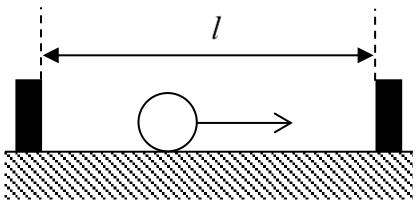
4. 座標 z に共役な運動量を求めよう。ヒント— 定義は $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ です。

5. ハミルトニアンを定義 $H = p\dot{z} - L$ に従って求めよう。ヒント—ハミルトニアンの変数は座標と運動量。

6. 正準方程式を求めよう（無理に解く必要はありません）。ヒント—片方の式は負号が付く。

7. E を正の定数として、$H = E$ のもとで、位相空間上の点 (z, p) がどのような軌跡を描くか、グラフに示しましょう。軌跡と座標軸と交わる点の座標も記しましょう。ヒント—横軸 z 、縦軸 p です。

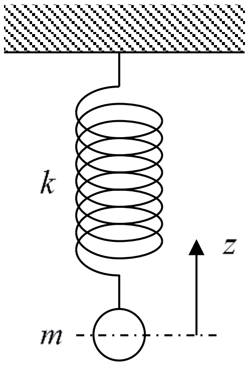
8. 間隔で l おかれた二枚の壁の間を弾性衝突しながら往復する質量 m の質点の運動を考えよう。運動量の絶対値を $p_0(>0)$ とするとき、位相空間上での軌跡を描こう。ヒント— 行きは p_0 、帰りは $-p_0$ です。



9. 前問で、位相空間で一周（実際の運動では左右一往復）する間、運動量を座標で積分した量 $J = \oint p dx$ を計算しましょう。 ヒント— $\oint p dx = \int_0^l p_0 \, dx + \int_l^0 - p_0 \, dx$ です。

10. 右側の壁面を微小な速度 dV で左側にずらして行きます。前問と同じく、質点が一往復する間の積分 $J = \oint p dx$ を計算しましょう。但し、dV は小さいとして微小量の二次は無視します。
〔余談〕J は断熱不変量と呼ばれる。J が一定なので l が減ると p は増加、すなわち、分子の運動エネルギーが増加、つまり断熱圧縮になります。

※感想をどうぞ。 担当 後藤（gotoo-t@sophia.ac.jp） http://pweb.cc.sophia.ac.jp/got-lab/



1. 図のように重力場中で、バネ定kのバネの先につけられた質量mの質点のラグランジアンを書こう。質点の座標はzとし上向きを正とする。
   ヒント—重力ポテンシャルも忘れずに。

   〔解〕$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - \frac{kz^2}{2} - mgz$

2. 座標変換$z \to z + C$によって、ラグランジアンを簡単な形にしよう。

   〔解〕$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - \frac{k}{2}\underbrace{\left(z + \frac{mg}{k}\right)}_{\text{これをzとおく}} + \underbrace{\frac{(mg)^2}{2k}}_{\text{定数は無視}}$

3. オイラー・ラグランジュ方程式を解いて解を求めよう。

   〔解〕$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = -kz - m\ddot{z} = 0$

   よって　$z = A\sin(\omega t + \phi)$　但し、A, ϕは定数、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

4. 座標zに共役な運動量を求めましょう。ヒント—定義は$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$です。

   〔解〕$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

5. ハミルトニアンを定義$H = p\dot{z} - L$に従って求めましょう。ヒント—ハミルトニアンの変数は座標と運動量のみです、気をつけて。

   〔解〕$H = p\dot{z} - L = m\dot{z}^2 - L = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{kz^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kz^2}{2}$

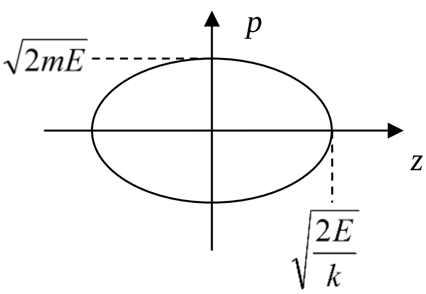
6. 正準方程式を求めましょう（無理に解く必要はありません）。ヒント—片方の式は負号が付きます。

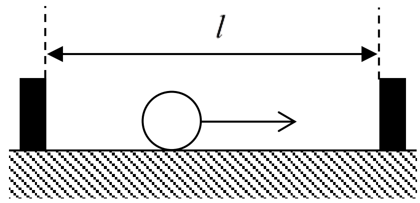
   〔解〕$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$

7. Eを正の定数として、$H = E$のもとで、位相空間上の点(z, p)がどのような軌跡を描くか、グラフに示しましょう。軌跡と座標軸と交わる点の座標も記しましょう。
   ヒント—横軸z、縦軸pのグラフを作りましょう。

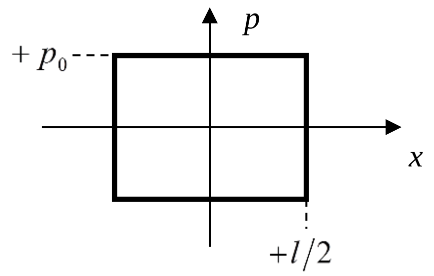
   〔解〕$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kz^2}{2} = E$は楕円です。

   p軸の交点は$p = \pm\sqrt{2mE}$、z軸の交点は$z = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$





8. 間隔がlである二枚の壁の間の水平面を往復する質量 m の質点の運動を考えます。質点の運動量の絶対値を p_0 とするとき、位相空間上での軌跡を描きましょう。但し、壁面では弾性衝突するとします。
ヒント―水平面では等速直線運動します。行き（右向き）の運動量は p_0、帰りは $-p_0$ です。
〔解〕右図の通り、矩形になります。



9. 位相空間で一周（実際の運動では左右一往復）する間の積分 $J=\oint p dx$ を計算しましょう。ここで、p は質点の運動量です。

ヒント― $\oint pdx = \int_0^l p_0\, dx + \int_l^0 -p_0\, dx$ です。

〔解〕 $J = p_0 l - (-p_0 l) = 2p_0 l$

10. 右側の壁面を微小な速度dV で左側にずらして行きます。前問と同様に質点が一往復する間の積分 $J=\oint pdx$ を計算し、前問と一致することを示しましょう。但し、dV は小さいとして微小量の二次は無視します。

※2014年7月書き直し。
〔解〕粒子は左壁から速度p_0/mで出発する($t=0, x=0$)。
時刻$t=T$、座標$x=l_0-dl$ において、右壁に衝突すると速度は$-p_0/m-2dV$と左向きに変化。
ここで、$T=\frac{l_0-dl}{p_0/m}=\frac{dl}{dV}$ すなわち、$dl \simeq \frac{l_0 dV}{p_0/m}=\frac{ml_0 dV}{p_0}$である。

以上より、$J=\int_0^{l_0-dl} p_0 dx + \int_{l_0-dl}^0 (-p_0-2mdV)dx = (l_0-dl)p_0-(l_0-dl)(-p_0-2mdV)$

$= (l_0-dl)\big(p_0-(-p_0-2mdV)\big) = (l_0-dl)(2p_0+2mdV) \simeq 2l_0p_0-2dlp_0+2l_0mdV$

$\simeq 2l_0p_0 - 2\frac{ml_0dV}{p_0}p_0 + 2l_0mdV = 2l_0p_0$

注）「≃」の入っている箇所は、二次の微小量$O(dl\cdot dV)$を無視しています。
（$O(\ldots)$は、微小量のオーダーを表す)。

〔余談１〕この J を断熱不変量と呼びます。J が一定なので、l が減ると p は増加、すなわち、分子の運動エネルギーが増加します。これが断熱圧縮です。
よって、l が減少して行くと、運動量が増えて行きます。質点を「ガス」の分子だと思うと、分子の運動が激しくなるので、温度が上がって行くことになります。

〔余談２〕

正の電荷を持つ陽子のまわりを円運動する電子を考えると、断熱不変量は、

$$J=\oint pdq=\oint mr^2\dot{\theta}d\theta=mr^2\dot{\theta}\oint d\theta=mr^2\omega\cdot 2\pi$$

となって、これは角運動量の次元を持ちます。昔、量子力学が考え出された頃、このJが水素原子のスペクトルの実験結果から、飛び飛びの値$J=nh$を取るだろう、という予想が出発点になりました。どうしてこの予想が出来たかと言うと、直感的に見て、飛び飛びの値を取る量は、なかなか変化しにくいものですから、もし、量子化されるとしたら、断熱不変量であろう、考えたわけです。

〔余談３〕

調和振動子では$H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega_0^2q^2}{2}$ですから作用積分は$J=2\int\sqrt{2m\left(E-m\omega_0^2q^2/2\right)}dq$となります。

これに、解$q=A\sin\omega_0 t,\ p=mA\omega_0\cos\omega_0 t$を代入すると、断熱不変量は、

$$J=2\pi\cdot\frac{E}{\omega_0}$$

であることがわかります。空間を電場と磁場の波が伝わる電磁波は、「空間の場」が調和振動子のように振動して伝わって行くと見立てる考え方があります。すると、断熱不変量は、$J=2\pi\dfrac{E}{\omega}$なのですから、これが一定値を取るだろうとして、$J=\hbar$と書くと、アインシュタインの光量子仮説$\dfrac{E}{\nu}=h$が得られます。