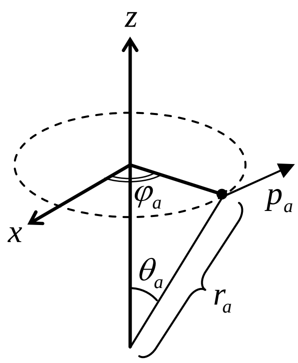
第５回 力学的相似

0 先週の復習

0-1‘ 保存則＝系の「対称性」と関係

L がある変数 q を含まない $\Rightarrow$ $\sum_a \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = const.$ 運動量保存



例）L が $q \equiv \varphi$ を含まない場合（z軸の周りで回転対称な場合）

$$L = \sum \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x}_a) = \sum \frac{m}{2}\left(\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\theta}_a^2 + r_a^2\dot{\varphi}_a^2 \sin^2\theta_a\right) - V(\vec{r}_a)$$ ですから、

注）$\vec{x} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ を微分して、

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} \end{pmatrix}$$ を自乗して絶対値を取ると、

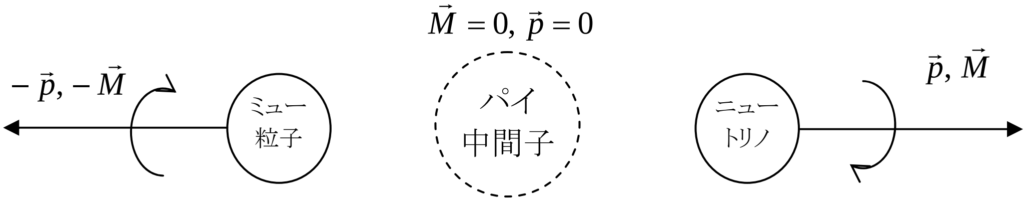
$$\therefore \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} = \sum_a m r_a^2 \dot{\varphi}_a \sin^2\theta_a = \sum_a r_a \sin\theta_a (m r_a \sin\theta_a \dot{\varphi}_a) = \sum_a r_a \sin\theta_a p_a = \sum_a (\vec{r} \times \vec{p})_z$$

0-2 空間反転

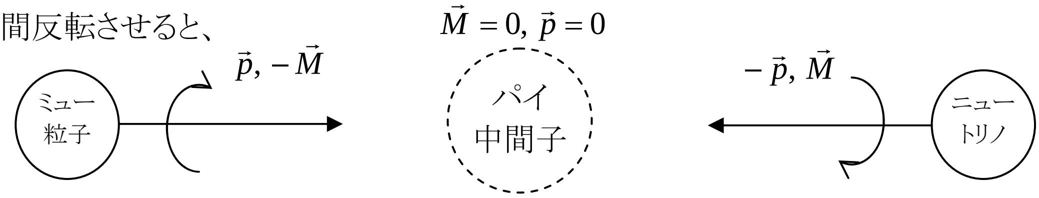
空間反転: $\vec{x} \to -\vec{x}$ に対して、速度・運動量は符号反転、角運動量は不変

この宇宙は、空間反転に対して「対称」でしょうか？

例）パイ中間子は、原子核の中で陽子と陽子をくっつける働きをしています。



空間反転させると、



ですが、実際に観測される μ 粒子は上のケース（$-\vec{p}, -\vec{M}$）だけなのです。つまり、宇宙は空間反転に対して対称でない（片方だけが存在）しているのです。

1　力学的相似―座標と時間の拡大縮小

【前回】座標を平行移動、回転 → L 不変 → 保存量

【今回】座標を拡大―何が起こるか？

ラグランジアンは、定数倍しても、定数を加えても、運動方程式（E. L.-eq.）は不変

（∵くくりだせるから）（∵微分で消えるから）

2　簡単な例 $U=x^n$, $n=2$（harmonic）

簡単な例として、一つの質点の場合を考えましょう。まず、運動エネルギーは

$\upsilon^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \xrightarrow{x\to\alpha x} \left(\frac{\alpha dx}{dt}\right)^2$ですから、$\alpha^2$ 倍になります。

ポテンシャルを$U=U_0x^n$ のような関数（*harmonic*, 調和）であるとします。座標変換 $x\to\alpha x$ を行うと、U は当然α^n 倍になります。もし、n=2 ならば、ラグランジアンは定数倍されるだけですから、同じ運動をするはずです。

たったこれだけの議論で、驚くべき結論が出ました。ポテンシャルが x^2 の関数、すなわち、調和振動の場合は、振動の振幅を変化させても同じ運動(周期が同じ)になるのです。これは、『振り子の等時性の原理』（但し振幅が小さい場合）です。

運動方程式を解かずとも、単にラグランジアンが不変あるいは定数倍になる条件を探すだけで、いろいろな法則が導けてしまうのです。

3　複数座標、複数質点の場合

ポテンシャル中の座標のべきが「揃っている」場合なら複数質点や、多次元の場合でも同じように成り立ちます。

なお、べきが揃っていることを、『座標の同次関数』である、と言います。はっきりと書けば、

$U=U(x_1,x_2,x_3...)$ に対し、$U(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,...)=\alpha^nU(x_1,x_2,x_3,...)$

が成り立つということです。

4　簡単な例 $n=-1$（重力、クーロン）

この場合は、時間の長さも変えて、β倍にすると、

ポテンシャルは$U\to\alpha^nU$ 、運動エネルギーは、$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\to\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{dx}{dt}\right)^2$ となりますから、

もし、$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\alpha^n$ という条件を満たせば、やはりラグランジアンは定数倍となります。

この条件は、$\beta = \alpha^{1-\frac{n}{2}}$ですから、座標を$\alpha$倍すると、所要時間は、$\alpha^{1-\frac{n}{2}}$倍になります。

$n=-1$を代入すると、座標α倍で時間$\alpha^{\frac{3}{2}}$倍ですから、『ケプラー第三法則』になります。
(公転周期の 2 乗は、軌道の半長径の 3 乗に比例)

5 速度、エネルギー、角運動量

ポテンシャルが座標冪の場合に座標をα倍、時間を$\beta = \alpha^{1-\frac{n}{2}}$倍するとラグランジアン不変なので、色々な量に代入してみると、

速さ $\upsilon \propto \left(\dfrac{dx}{dt}\right) \to \left(\dfrac{\alpha dx}{\alpha^{1-\frac{n}{2}} dt}\right) = \alpha^{\frac{n}{2}} \upsilon$

エネルギー $E \propto \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 \to \left(\dfrac{\alpha dx}{\alpha^{1-\frac{n}{2}} dt}\right)^2 = \alpha^n E$

角運動量 $M \propto x\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \to \alpha x\left(\dfrac{\alpha dx}{\alpha^{1-\frac{n}{2}} dt}\right) = \alpha^{1+\frac{n}{2}} M$

のようになります。

6 重力による落下 n=1

この場合、$U=-mgz$なので、$\beta = \alpha^{1-n/2} = \alpha^{1/2}$となり、よって、

座標をα倍、時間を$\alpha^{\frac{1}{2}}$倍したときにラグランジアンは定数倍(⇒運動方程式不変)となります。
つまり、落下時間は高さの 1/2 乗に比例するという結論が出ます。

7 質量を定数倍(α倍) 重力

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの両方に m が入っていますから、m を変えてもラグランジアンは不変（定数倍）となります。ガリレオとピサの斜塔の話ですね。

8 質量分析（サイクロトロン運動）

磁場によるローレンツ力は $f = q\upsilon B$ です。正確な表式はもっと後でやりますが、
この「磁場による力」に対するラグランジアンを考えましょう。

一般的に力は、ポテンシャルを使って$F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$と表せますから、

力に対する仮想的なポテンシャルを無理矢理考えてみると、$U=-xF$ とおけば、
微分すると確かに力になります。

注意）仮想的なポテンシャル—本当のポテンシャルではありません。

ローレンツ力に対しては$U=-\vec{x}\cdot\vec{f}=-q\vec{x}\cdot(\upsilon\times B)$が仮想的なポテンシャルとなりますから、

$$L=\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2+q\vec{x}\cdot\upsilon\times B$$

次元を考えると、$\sim m\dfrac{x^2}{t^2}+qB\dfrac{x^2}{t}\sim\dfrac{qx^2}{t}\left(\dfrac{m}{q}\dfrac{1}{t}+B\right)$

となります。まず、質量と電荷をともに定数倍にしてみると明らかに L も定数倍なので、
同じ運動になります。これが質量分析（比電荷を調べる実験）の原理

「$\dfrac{m}{q}$ ＝一定なら、同じ半径 $r_c=\dfrac{m\upsilon}{qB}$ 、同じ周期で円運動」です。

次に磁場が定数倍になった場合は、座標をいじったのではどうにもならず、時間が縮みます。

右辺の〔〕の中身全体$\left(\dfrac{m}{q}\dfrac{1}{t}+B\right)$が定数倍になるためには、$\dfrac{m}{q}\dfrac{1}{t}=B$

が必要で、確かに、ランダウ周波数 $\omega_c\equiv qB/m$ となっているわけです。

9 単振動と振り子(一次元)

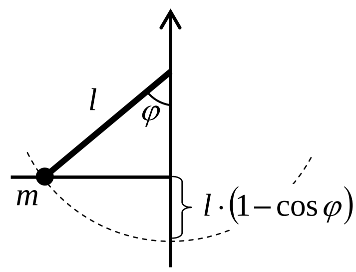
先ほど、調和振動についてやったついでに、振り子の場合はどうなるか考えてみましょう。

振り子のポテンシャルは、$-mgl\cos\varphi$

→べき関数でないので、座標(今の場合、一般化座標φ)

の拡大縮小に対して相似には全然なりません。

よって、周期は振幅に依存します。これを調べてみましょう。



10 一次元の周期運動（一般論）

ラグランジアンは $L=\dfrac{m\dot{x}}{2}-U(x)$ で時間を含みませんから、エネルギー保存則

【復習】エネルギー保存則の導出は、i を多変数の添字として、

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\text{より}$$

$$\therefore\frac{d}{dt}\left(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-L\right)=0\text{、よって、}E=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-L=const.$$

を使えば、$\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E$ となります。 あたりまえですね。

これは 1 階の微分方程式ですから、変数分離で解けて

$\dot{x}=\pm\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)$　　　複合は行きと帰りの分。行きの分だけを計算すると、

$\therefore \frac{dt}{dx}=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-U(x)}}$, $t(x)=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$

となります。我々はこれを「解けた」と言います。なぜならあとは積分するだけだからです。

妙な形をしていますが、逆に x について解いてやればよいのです。

古典力学: 運動は $E-U$ が正の領域でのみ起こります。領域の境界は、$E=U$ となる所。

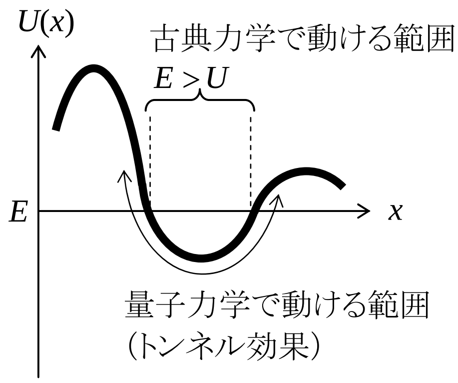
量子力学: 少し、$E<U$ のところまで染み出て行きます。トンネル効果というものです。

11 周期を求める

周期＝両境界を往復する時間なので、

$T=2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$ となります。

但し、$U(x_1)=U(x_2)=E$ です。



12 振り子の場合(相似でない)

揺れの角度を変数とすれば、$\upsilon=l\dot{\varphi}$, $U=mgl\left(1-\cos\varphi\right)$ ですから、

$$L=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}+mgl\cos\varphi$$

エネルギー保存則の式は、

$$E=\dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-L=ml^2\dot{\varphi}^2-L=ml^2\dot{\varphi}^2-\left(\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2-U(x)\right)=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi$$

一方、最大振幅を φ_0 とすれば、$E=-mgl\cos\varphi_0$ です(∵そこで止まるから)

これを前項で導いた $T=2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$ に代入します。

　　但し、運動エネルギーの項が $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ ではなく、$\frac{m\ell^2\dot{\varphi}^2}{2}$ であることに注意

よって周期は、

$$T=2\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{-mgl\cos\varphi_0+mgl\cos\varphi}}$$ となります。

行きと帰りが対称的で同じことを使うと、

$$T=2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{0}^{+\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$ です。

倍角の公式$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$を使って、

$$T=\sqrt{\frac{8l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=\sqrt{\frac{8l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\xi}{2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{4l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

変換$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\xi$を行います（$\because$すると$1-\sin^2\xi$がくくり出されます）

変数変換は、$\frac{d\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\xi d\xi$

$$\therefore d\varphi=\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\xi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

積分範囲は、$\varphi=0\sim\varphi_0$が、$\xi=0\sim\pi/2$　に変わります

分母の中身は、$\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=\sin^2\frac{\varphi_0}{2}(1-\sin^2\xi)=\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos^2\xi$

よって、

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\xi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos^2\xi}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

最後に分母の$\cos(\varphi/2)$に変数変換式$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\xi$を再び代入すれば、

$$=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}}=4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

得ます。

13 楕円積分

$x \equiv \sin(\varphi_0/2)$と書いて、この積分$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi}}$を、第一種の完全楕円積分

と呼びます。

まず明らかに$K(0) = \frac{\pi}{2}$で、$K(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\cos \xi} = \int_0^{\pi/2} \frac{d \sin \xi}{\cos^2 \xi} = \int_0^1 \frac{ds}{1 - s^2} = \log\left|\frac{1+s}{1-s}\right|_0^1 = \infty$です。

xが小さいときは、分母はテイラー展開できて、

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi}} \cong 1 + \frac{1}{2} x^2 \sin^2 \xi$$

ですから、代入すれば、

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi}} \cong \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x^2 \sin^2 \xi}{2}\right) d\xi$$

倍角公式で、

$$= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2\xi}{2}\right) d\xi = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \cos 2\xi\right) d\xi$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} \frac{\sin 2\xi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$$

を得ます。

14 振幅があまり小さくない振り子の周期

$x \equiv \sin(\varphi_0/2)$とおいたのですから、振幅が小さい場合は、$x \cong \varphi_0/2 + O(\varphi_0^3)$です。

注意）振幅があまり小さくないのですが、結構小さいというわけです。

結局、

$$T \cong 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(x) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + O(\varphi_0^4)\right)$$

となり、振幅が大きくなると周期は伸びる傾向にあります。

もっとどんどん振幅が大きくなって、てっぺん（頂上）まで来るとそのまま止まって戻りません。

このとき確かに、$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(1) = \infty$です。

（注、紐はたるまない、つまり、軽い棒のようなものであるとしています）

15 中心力の場(3 次元)

次に三次元の場合についてケプラー則がどうなるか確めてみましょう。

ポテンシャルが中心力$U = U(r)$の場合、力は、

$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\dfrac{\partial U(r)}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial \vec{r}}$ですが、

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ や、$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$などに注意すれば、確かに、

$\vec{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial r}\dfrac{\vec{r}}{r}$と、中心を向く力となります。

16 面内運動

先週やったように、空間が回転対称の場合(中心力)なので角運動量$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$が保存

外積はベクトル「rとpのなす面」に垂直ですから、その面の法線です。

これが一定ということは、その面がいつでも同じということです。

これは、運動はいつでも同じ面内にとどまることを意味しています。

17 ラグランジアン

平面極座標を使えば、$L = \dfrac{mv^2}{2} - U(r) = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$となります。

Lはφを含まないので、オイラーラグランジュ方程式から直ちに、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = const.$

という保存量が求まりますが、これは z 軸方向を向いた角運動量Mそのものです。

エネルギーは、$E = \dot{r}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r)$となります。

保存量Mを代入して$\dot{\varphi}$を消去すれば、

$E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{M^2}{2mr^2} + U(r)$と、見かけ上、1 次元の問題に帰着します。

18 有効ポテンシャル

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{M^2}{2mr^2} + U(r)}_{\text{有効ポテンシャル}}$$

どうしてそんな風に呼ぶかと言うと、

たとえば、引力$U = -a/r$に対し、惑星が中心に落ち込まないのは、

有効ポテンシャル $\dfrac{M^2}{2mr^2}-\dfrac{a}{r}$ が、中心部分で強く斥力として働いているため、

と見るわけです。

19 再び一次元振動運動

上式を r についてだけ考えれば、有効ポテンシャルの谷間での一次元振動運動です。

さて、r についての式を変数分離で解くと、

$\dot{r}=\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-\dfrac{M^2}{2mr^2}-U(r)\right)}$ から、$t=t(r)=\displaystyle\int_{r_0}^{r}\dfrac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-U(r)\right)-\dfrac{M^2}{m^2r^2}}}$ と、解けます

(もちろん、解析的に積分できるかどうかは知りません)。

φ はどうするの、と心配かも知れませんが、逆に $r=r(t)$ について解いた後、角運動量から、

$\dot{\varphi}=\dfrac{M}{mr^2}$ で求めればよいのです。

20 角度の時間変化

実際、$\dot{\varphi}=\dfrac{M}{mr^2}$ を使って、$d\varphi=\dfrac{M}{mr^2}dt$ に注意すれば、直ちに $\varphi=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\dfrac{Mdt}{mr^2}$ となり、さらに、

$dt=dr\Big/\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-U\right)-\dfrac{M^2}{m^2r^2}}$ を使えば、

$\varphi=\displaystyle\int_{r_0}^{r}\dfrac{Mdr}{mr^2\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-U\right)-\dfrac{M^2}{m^2r^2}}}$ と、角度を $\varphi=\varphi(r)$ と、r の関数として求められます。

この運動が、$r=r_{\min}\sim r_{\max}$ の間で起こるとすると、半周期回る間の角度は、

$\Delta\varphi=\displaystyle\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\dfrac{Mdr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-\dfrac{M^2}{r^2}}}$ となり、軌道が閉じるための条件は、$U=-1/r$ または は

$U=r^2$ のいずれかということが判っています。前者は、ケプラー問題、後者は、三次元の調和振動子 $L=\dfrac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2m}-\dfrac{k|\vec{x}|^2}{2}$ ということです。これ以外は、軌道は閉じずに、二次元領域を埋め尽くすということが解っています。ケプラー問題でも一般相対論的効果を取り入れると、軌道は閉じなくなります。所謂「近日点移動」と云う現象です。