【訂正版】

１． 外力をラグランジアンに取り入れるには？

力とポテンシャルの関係が $\vec{f}=-\nabla U$ であることを思い出そう。すると、$U_f=-\vec{x}\cdot\vec{f}$ とおけば良さそうである。確かに $-\nabla U_f=-\nabla\left(-\vec{x}\cdot\vec{f}\right)=\vec{f}$ となる。この U_f を仮想ポテンシャルと呼ぶ。

２． オイラーラグランジュ方程式

ラグランジアンに外力を加えて $L-U_f$ とすると、

$\dfrac{\partial\left(L-U_f\right)}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\left(L-U_f\right)}{\partial\dot{x}}=\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{\partial\left(-xf\right)}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}+f=0$ となる。

つまり、$\boxed{\text{外力を導入するにはオイラーラグランジュ方程式に加えればよい}}$

例） $f=f_0\cos\omega t$ という外力が働く調和振動子の Euler-Lagrange 方程式を求めよ

３． 摩擦力

速度に比例するような摩擦力 $\vec{f}=-\alpha\dot{\vec{x}}$ を考える。（α は定数）

注）流体の中を低速で進む物体に働く摩擦力はこれに近い。

例）摩擦力のある平面を滑る質点

速度に比例する摩擦力 $f=-\alpha\dot{x}$ の働いている水平面を一次元運動する質点のオイラーラグランジュ方程式が $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}+f=-m\ddot{x}-\alpha\dot{x}=0$ であることを示せ。

４． 摩擦力をラグランジアンに組み込む

摩擦力を取り込んだラグランジアンを $L=g(t)\left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2}-U(x)\right)$ と置く。但し、この $U(x)$ は通常のポテンシャルである。これをオイラーラグランジュ方程式に代入すると、

$\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=-g\dfrac{dU}{dx}-\dfrac{d}{dt}\left(gm\dot{x}\right)=-g\dfrac{dU}{dx}-m\dot{g}\dot{x}-mg\ddot{x}=0$ となる。よって、

$m\ddot{x}=-\dfrac{dU}{dx}-\dfrac{m\dot{g}\dot{x}}{g}$ ＝ポテンシャル力＋摩擦力

となる。よって、右辺第二項の摩擦力が、 $f=-\alpha\dot{x}$ に一致すれば良い。

$\therefore -\dfrac{m\dot{g}\dot{x}}{g}=-\alpha\dot{x}$, $\therefore m\dot{g}=\alpha g$ であるから、 $g=Ce^{\alpha t/m}$ となる(C は積分定数)

以上より、 $L=e^{\alpha t/m}\left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2}-U(x)\right)$

５． 摩擦力がある場合の一般化運動量

上のラグランジアンから、一般化運動量 $p=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=e^{\alpha t/m}m\dot{x}$ であることを示せ 。

６． 定義 $H=p\dot{x}-L$ に従ってハミルトニアンを求めよ。