基礎物理コースⅠで習うこと

１ニュートンの運動方程式 $f = ma$

微分方程式 $\upsilon = x',\ a = \upsilon'$ なので、微分がいたるところに現われる

・摩擦と外力を含んだ振動(=LCR 共振回路) $y'' + by' + \omega_0^2 y = f\cos\omega t$

・ケプラー問題、ラザフォード散乱

２パソコンを使って解く

微分方程式の意味の理解

微小時間経過後の座標と速さ $\begin{cases} x(t+dt) \approx \overbrace{x(t)+\upsilon(t)}^{\text{元の値}}dt \\ \upsilon(t+dt) \approx \upsilon(t)+\underbrace{a(t)}_{\text{運動方程式 } f=ma \text{ から求めた値}}dt \end{cases}$

３力とポテンシャル

ポテンシャルと力の関係 $f = -dU/dx$

仕事　力と移動が平行。∴磁場は絶対に仕事をしない

保存量(エネルギー、運動量、角運動量)

４多次元への拡張

ベクトルの関数（変数もベクトル） $\vec{f} = m\vec{a}$, $\vec{f} = -dU/d\vec{x} = -(dU/dx, dU/dy, dU/dz) = -\nabla U$

ベクトルの内積・外積、ベクトルの微分、

テイラー展開 $f(\vec{x}+d\vec{x}) = f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})\cdot d\vec{x} + \frac{1}{2} d\vec{x}\,\nabla^t \nabla f(\vec{x})\, d\vec{x}\cdots$

５多粒子への拡張

多変数の微分方程式 (連立微分方程式)

三次元空間を運動する三つの粒子で座標変数は９個

連成振動

ばねで繋がれたいくつかの粒子の振動

粒子数→∞で、連続体(波)、剛体へ

６剛体

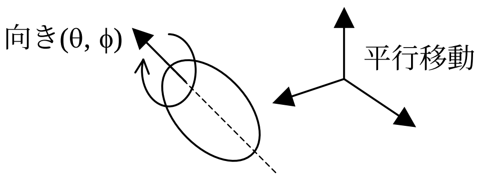
粒子数はアボガドロ数程度。しかし、「曲がらない、凹まない」ので自由度(＝動かし方の個数)は６つ。

トルク $T = -dU/d\theta$

剛体の運動方程式 $\dot{\vec{L}} = \vec{T}$

オイラー角、

コマの歳差運動、コリオリの力



７波

弦の振動

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \upsilon^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$、拡散方程式 $\dfrac{\partial U}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

ラプラシアン $\Delta U = \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{d^2U}{dy^2} + \dfrac{d^2U}{dz^2}$ 　～凹み具合(凸み具合)

８やらないこと

・速度が大きい極限―相対論（質量が変わる、運動量が変わる、磁場と電場が入れ替わる､､､）

・粒子が小さい極限―量子力学（ニュートン運動方程式で粒子の動きが定められない）

ノンプレースメントテスト 〜 できてもできなくてもこのクラスです。半年間よろしくお願いします。

1. $\tan^2 kx$ を x で微分しましょう（k は定数）。但し $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ です。

2. $\tan kx$ を x で積分しましょう（k は定数）

3. $\mathrm{Arc}\cos x$ を x で微分しましょう。但し、$y = \mathrm{Arc}\cos x$ とすると $\cos y = kx$ です。

4. $\vec{x} = (x, y) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ とするとき（r, ω（オメガ）は定数）、
$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$, $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を求めて、三つのベクトル
$\vec{x}, \vec{\upsilon}, \vec{a}$ の方向を図示してみましょう。

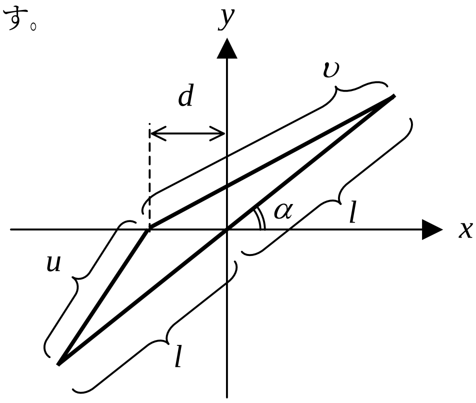
5. $e^{-\alpha x}$ を $x = 1$ のまわりで三次までテイラー展開しましょう。
ヒント―「$x = x_0$ のまわり」のテイラー展開の公式は、z を微少量として、

$$f(x_0 + z) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{ゼロ次}} + \underbrace{f'(x_0)z}_{\text{一次}} + \underbrace{\frac{1}{2!}f''(x_0)z^2}_{\text{二次}} + \underbrace{\frac{1}{3!}f'''(x_0)z^3}_{\text{三次}} \cdots$$

です。

※テイラー展開する目的は「近似」です。z=0 ならばゼロ次の項で十分です。z が大きくなるにつれて、高い次数まで必要になります。

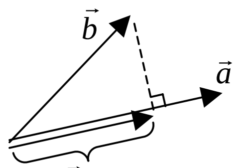
6. $\sqrt{1+x}$ や $\dfrac{1}{1+x}$ を $x = 0$ のまわりで二次までテイラー展開しましょう。
ヒント―一次までの展開式は非常に便利なのでこれから頻繁（ひんぱん）に使います。



7. $\cos\alpha x$ を $x = 0$ のまわりで三次までテイラー展開しましょう。
次に $x = \dfrac{\pi}{2}$ のまわりでも三次までテイラー展開しましょう。
ヒント―上の公式で $x_0 = 0$ または $x_0 = \pi/2$ とすれば OK です。

8. 右図で $u + \upsilon$ の長さを求めましょう（但し d, l, α は定数）。
さらに、d が非常に短い場合に $u + \upsilon - 2l$ を近似計算しましょう。
ヒント―余弦定理を使いましょう。

9. 平行でない二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ から、お互いに直交して長さが1である三つの基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を作りましょう。
ヒント― 一つめはもちろん、$\vec{a}$ を規格化したものです。二つ目は $\vec{b}$ から $\vec{a}$ 方向の成分（射影）を引いたあと、規格化します。三つ目は外積を使います。



$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への射影

10. おまけ

a b c d e f g h i k l m n o p q r s t w x y z
α β χ δ ε ϕ γ η ι κ λ μ ν ο π θ ρ σ τ ω ξ ψ ζ
φ
Α Β Χ Δ Ε Φ Γ Η Ι Κ Λ Μ Ν Ο Π Θ Ρ Σ Τ Ω Ξ Ψ Ζ

上のギリシャ文字の読みを書いて覚えましょう。ファイとプサイとか、ピーではなくロー、とかをきちんと区別しましょう。クシイとグザイとか、いろいろな発音があるケースにも注意しましょう。

【解答】

1. まず、$y=kx$とおけば$\dfrac{dy}{dx}=k$なので、$\dfrac{d\tan^2 kx}{dx}=\dfrac{d\tan^2 y}{dy}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\tan^2 y}{dy}k$

   次に$\tan y=z$とおくと$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}$なので、$=\dfrac{d(z^2)}{dz}\dfrac{dz}{dy}k=(2z)\dfrac{1}{\cos^2 y}k=\dfrac{2zk}{\cos^2 kx}=\dfrac{2k\sin kx}{\cos^3 kx}$

2. $y=kx$とおいて、

   $$\int \tan kx\,dx=\int \tan y\frac{dx}{dy}dy=\int \tan y\frac{1}{k}dy=\frac{1}{k}\int \tan y\,dy=\frac{1}{k}\int\frac{\sin y}{\cos y}dy$$

   さらに、$z=\cos y$と置けば$\dfrac{dy}{dz}=\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^{-1}=(-\sin y)^{-1}=\dfrac{-1}{\sin y}$なので、

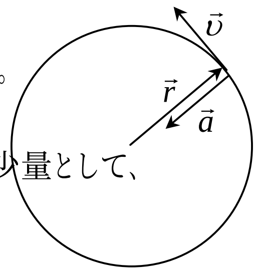
   $$=\frac{1}{k}\int\frac{\sin y}{\cos y}\frac{dy}{dz}dz=\frac{1}{k}\int\frac{\sin y}{z}\frac{-1}{\sin y}dz=\frac{1}{k}\int\frac{-1}{z}dz=-\frac{1}{k}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{k}\log z=-\frac{1}{k}\log(\cos kx)$$

3. $y=\mathrm{Arc}\cos x$とすると$\cos y=x$なので、逆関数の微分公式（単に逆数にすれば良い）を使って、

   $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}=(-\sin y)^{-1}=\dfrac{-1}{\sin y}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ （$x=0\sim1$の場合。$x=-1\sim0$では$\dfrac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$）

4. $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{v}=r\omega(-\sin\omega t,\cos\omega t)$, $\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{a}=-r\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)=-\omega^2\vec{x}$

   ※講義では$r=r(t)$, $\omega=\omega(t)$のような、rとωが定数でない場合を扱います。



5. $e^{-\alpha x}$を$x=1$のまわりで三次までテイラー展開すると、zを1からのずれの微少量として、

   $$e^{-\alpha(1+z)}=e^{-\alpha}+(-\alpha)e^{-\alpha}z+\frac{1}{2}(-\alpha)^2e^{-\alpha}z^2+\frac{1}{6}(-\alpha)^3e^{-\alpha}z^3+\cdots$$

   となる。ここで$\left(e^{-\alpha x}\right)'=-\alpha e^{-\alpha x}$ を使った。

6. $\sqrt{1+x}$はまず微分を計算しておくと、$\sqrt{1+x}'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $\sqrt{1+x}''=\dfrac{-1}{4(1+x)^{3/2}}$

   よって、$\sqrt{1+x}=\sqrt{1}+\dfrac{1}{2\sqrt{1}}x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{4(1)^{3/2}}\right)x^2+\cdots=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\cdots$

   同様に、$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)''=\dfrac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$ より、

   $\dfrac{1}{1+x}=1+\dfrac{-1}{1}x+\dfrac{2}{2}x^2+\cdots=1-x+x^2-x^3+\cdots$ （実は延々と続く）

7. $\cos x$を$x=0$のまわりで三次までテイラー展開すると、

   zを微少量とすると、$\cos z=\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{(-\sin 0)}_{0}z+\dfrac{1}{2}\underbrace{(-\cos 0)}_{-1}z^2+\dfrac{1}{6}\underbrace{(\sin 0)}_{0}z^3+\cdots=1-\dfrac{z^2}{2}+\cdots$

   次に$\cos x$を$x=\dfrac{\pi}{2}$のまわりで三次までテイラー展開すると、

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+z\right)=\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0}+\underbrace{\left(-\sin\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}z+\frac{1}{2}\underbrace{\left(-\cos\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0}z^2+\frac{1}{6}\underbrace{\left(\sin\tfrac{\pi}{2}\right)}_{1}z^3+\cdots=-z+\frac{z^3}{6}\cdots$$

※どこのまわりでテーラー展開するかはとても大事。全く別の式になる。

8. $u=\sqrt{l^2+d^2-2ld\cos\alpha}$, $\upsilon=\sqrt{l^2+d^2+2ld\cos\alpha}$

$$u+d-2l\approx l\sqrt{1+\left(\frac{d^2}{l^2}-\frac{2d\cos\alpha}{l}\right)}+l\sqrt{1+\left(\frac{d^2}{l^2}+\frac{2d\cos\alpha}{l}\right)}-2l$$

ここで、$\sqrt{x}$ を 1 のまわりでテイラー展開すると、$\sqrt{1+z}=1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)z^2+\cdots$ なので、

$$\therefore u+d-2l\approx l\left(1+\left(\frac{d^2}{2l^2}-\frac{d\cos\alpha}{l}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2d\cos\alpha}{l}\right)^2+1+\left(\frac{d^2}{2l^2}+\frac{d\cos\alpha}{l}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2d\cos\alpha}{l}\right)^2-2\right)$$

$$=l\left(\frac{d^2}{l^2}-\frac{d^2}{l^2}\cos^2\alpha\right)=\frac{d^2}{l}\left(1-\cos^2\alpha\right)=\frac{d^2}{l}\sin^2\alpha$$

※さらに、α が小さい場合は、$u+d-2l=\frac{d^2}{l}\alpha^2$ となることがわかります。これは、どちらに引っ張ってもゴムひもの長さは滑らかに増大することを意味しています。

※ここで、≈は「およそ」の記号。ちなみに／は割り算の記号です。これからは÷や　の記号は使いません。

9. イ) まずヒントに従って $\vec{e}_1=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ である。

ロ) 次に $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への射影ベクトルを $\vec{b}_a$ とすると、$\left|\vec{b}_a\right|=\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{b}\right|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$ である。

これに、$\vec{a}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_1=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ をかければ、$\vec{b}_a=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ が得られる。

よって、$\vec{e}_2$ は、$\vec{b}-\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ を規格化して、$\vec{e}=\vec{b}-\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\Bigg/\left|\vec{b}-\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right|$

(スラッシュは割り算を表す記号)

ハ) 最後は $\vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2$ である。

※具体例として $\vec{a}=(2,0,0)$, $\vec{b}=(1,1,0)$ から、
この方法「シュミットの直交化法」で三つの単位ベクトル $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ を作ってみよう。

10. アルファ、ベータ、カイ、デルタ、イプシロン、ファイ、ガンマ、イータ、イオタ、
カッパ、ラムダ、ミュー、ニュー、オミクロン、パイ、シータ (テータ)、ロー、シグマ、
タウ、オメガ、グザイ (クシィ)、プサイ、ツェータ (ゼータ)

α β χ δ ε ϕ γ η ι κ λ μ ν ο π θ ρ σ τ ω ξ ψ ζ
φ
Α Β Χ Δ Ε Φ Γ Η Ι Κ Λ Μ Ν Ο Π Θ Ρ Σ Τ Ω Ξ Ψ Ζ