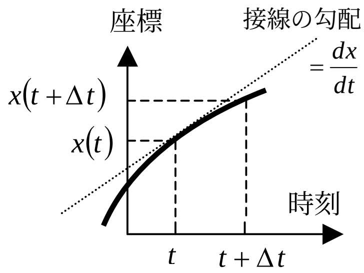
ニュートンの運動方程式を使って問題を解く



$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

1 $f = ma = m\ddot{x}$

微分方程式の問題(二階微分方程式)

$$\upsilon = \upsilon_0 + \int_0^t a(t)dt \quad \Leftrightarrow a = \frac{d\upsilon}{dt}(t) \quad , \quad x = x_0 + \int_0^t \upsilon(t)dt \quad \Leftrightarrow \upsilon = \frac{dx}{dt}(t)$$

1-1 等速直線運動 $f = 0$

$0 = ma = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$ より、$\upsilon = \upsilon_0$ (υ_0 は積分定数＝初期速度)

$\therefore \upsilon_0 = \dfrac{dx}{dt}$ より、$x = x_0 + \int_0^t \upsilon_0 dt = x_0 + \upsilon_0 t$ (x_0 は積分定数＝初期位置)

1-2 自由落下 $f = mg$ (下向き方向を正とする)

$mg = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$ より、$\upsilon = \upsilon_0 + \int_0^t g dt = \upsilon_0 + gt$ (υ_0 は積分定数＝初期速度)

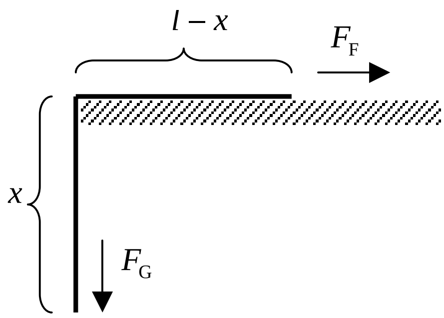
$\therefore \upsilon = \upsilon_0 + gt = \dfrac{dx}{dt}$ より、

$x = x_0 + \int_0^t \upsilon_0 + gt \; dt = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ (x_0 は積分定数＝初期位置)

1-3 わかること

二階微分方程式 ⇒ 積分定数が二つ出て来る

物理での積分定数は必ず「意味」を持つ ⇒ 初期速度、初期位置



2 すべり落ちる鎖の問題

2-1 問題の設定

単位長さあたりの重さ σ (線密度、kg/m)、長さ l (m)

机の上の動摩擦係数＝μ' (無次元)

机の端からすべり落ちるようすを調べる ⇒ 机から垂れ下がった部分の長さを x とする

2-2 運動方程式

下向きにかかる力: $F_\mathrm{G} = \overbrace{m_x}^{\text{机上の部分の重さ}} g = \sigma x g$

摩擦力：$F_{\mathrm{F}} = \underbrace{m_{l-x}}_{\text{垂れ下がった部分の重さ}} g\mu' = \sigma(l-x)g\mu'$

ニュートンの運動方程式：$m_l\ddot{x} = \sigma l\ddot{x} = \overbrace{\sigma xg}^{F_{\mathrm{G}}} - \overbrace{\sigma(l-x)g\mu'}^{F_{\mathrm{F}}}$

$\therefore\ l\ddot{x} = xg - (l-x)g\mu'$

$\therefore\ \ddot{x} = x\dfrac{g}{l} - (l-x)\dfrac{g}{l}\mu' = \dfrac{g}{l}(1+\mu')x - g\mu'$

3 運動方程式を解く

3-1 微分方程式をまとめて簡単にする

《ポイント》右辺の係数$\dfrac{g}{l}(1+\mu')$や、$g\mu'$は、各々、「一つ」の定数と見なせる。

$\alpha = \sqrt{\dfrac{g}{l}(1+\mu')}$，$\beta = g\mu'$のようにまとめてしまう。

《注》なぜ√にしたかは、後でわかります。最初から√にした方が

良いと知っているわけではないです。

$\therefore\ \ddot{x} = \alpha^2 x - \beta$

解けるような解けないような、微分方程式が出てきました。

ここでさらに、$y \equiv \dot{x}$と置いてみます。すると、$\dddot{x} = \alpha^2\dot{x}$より、

$\ddot{y} = \dfrac{g}{l}(1+\mu')y = \alpha^2 y$

という、もっと簡単な二階微分方程式になりました。

3-2 微分方程式の解

微分すると定数倍になる関数は、既に二つ知っています。三角関数と指数関数です。

注）一階微分方程式は必ず解ける便利な方法「変数分離」があるのですが、

二階微分方程式は一つ一つチャレンジして、解法を覚えて行く必要があります。

このうち、三角関数は符号が逆転しますからこれにはあてはまりません。

よって、残された解は、$e^{\alpha t}$及び$e^{-\alpha t}$の二つ。

これらの定数倍あるいは和も解になりますから、$y = Ae^{+\alpha t} + Be^{-\alpha t}$が求める解です。

ここで、A, Bは積分定数です。

N階微分方程式で、N個の積分定数を含んだ解のことを「微分方程式の一般解」と言います。

3-3 定数倍と和も、解になるか

馬鹿馬鹿しいと言わずに実際に試して見ましょう(実は非常に重要な原理が隠されている)。

$y = Ae^{+\alpha t} + Be^{-\alpha t}$ を二階微分すると、

$$\ddot{y} = \alpha^2 Ae^{+\alpha t} + (-\alpha)^2 Be^{-\alpha t} = \alpha^2\left(Ae^{+\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right) = \alpha^2 y$$

となって確かに元の微分方程式を満たします。

これを、「二つの解の線型結合も解となる」と言います。

【余談】微分方程式の中には線型結合が、解になるもの、と、解にならないもの、があります。

「線型微分方程式」「非線形微分方程式」

電磁波を記述するマックスウェルの方程式は、「線型微分方程式」です。よって、二つの電磁波が重ね合わさっても、そのまま微分方程式を満たしますので、「そのまま」の波形で進みます―「重ね合わせの原理」。パルサーの出す電波と、携帯電話の電波と、テレビの電話を苦も無く分離できるのはこのおかげなのです。

もしマックスウェルの方程式が非線形だったとすると、三つの電波が重ね合わさる際に、そのままではなく、余計な波が発生して混じり合って来てしまいます。

4 滑り落ちる鎖の問題の解

$y = \dot{x}$ と置いたので、このままでは速度の時間変化の式です。

最終結果は、x =座標、に戻さないとにいけません。それは簡単で、単純に時間で積分して、

$$\therefore x = \frac{A}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{B}{\alpha}e^{-\alpha t} + C$$

となります。ここで、$\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\mu'\right)}$ は問題で与えられる定数です。

【問題点1】積分定数が三つになってしまいました。元々、x の微分方程式は $\ddot{x} = \alpha^2 x - \beta$ で、二階ですから、二つの定数しか無いはずです。

【問題点2】数学的には方程式は解けましたが、話が終わったわけではなく、

物理的にどういう運動なのかを理解する必要があります。

5 謎の定数の起源―どういう運動か調べる

運動の初期条件がどういう形で与えられるか考えましょう。

滑り出す瞬間の時間を$t=0$とすると、

I. 静止摩擦係数μと重力がちょうど釣り合う限界の位置：$\underbrace{\sigma x(0)g}_{\text{重力}}=\underbrace{\sigma(l-x(0))g\mu}_{\text{摩擦力}}$

II. 滑り出す瞬間の速度（初期速度）はゼロ：$\dot{x}(0)=0$

という物理的な意味のある条件が課されています。これと微分方程式の解を比べましょう。

5-1 まず、II.式より、$\dot{x}(0)=0$ですから、微分方程式の解の表式 $\dot{x}(0)=Ae^{0}+Be^{-0}=A+B$

と比べると、直ちに、$A+B=0$が得られます。

【着目】独立な積分定数は二つに減りました。

5-2 次にI.式より、$\therefore x(0)=l\mu-x(0)\mu$ですから、$\therefore \underbrace{x(0)\equiv x_0}_{x_0\text{の定義}}=\dfrac{l\mu}{1+\mu}$

これも微分方程式の解の表式

$$x(0)=\frac{A}{\alpha}e^{0}-\frac{B}{\alpha}e^{-0}+C=\frac{A}{\alpha}-\frac{B}{\alpha}+C=\frac{2A}{\alpha}+C$$ （但し、II.の結果も代入した）

と比較すると、$x_0=\dfrac{l\mu}{1+\mu}=\dfrac{2A}{\alpha}+C$ という関係が得られます。

これを変形すると、$\dfrac{A}{\alpha}=-\dfrac{B}{\alpha}=\dfrac{x_0}{2}-\dfrac{C}{2}$ となるので、解は、

$$\therefore x=\frac{A}{\alpha}e^{+\alpha t}-\frac{B}{\alpha}e^{-\alpha t}+C=\frac{A}{\alpha}\left(e^{+\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)+C=\frac{x_0-C}{2}\left(e^{+\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)=\left(x_0-C\right)\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}+C$$

とまとまってきました。

6 もう一つの条件 — 滑り出す瞬間の加速度

最後にCの物理的意味を調べます。

滑り出す瞬間の座標は$x_0=\dfrac{l\mu}{1+\mu}$と求まっています。

（この瞬間に、$F_{\mathrm{G}}>$静止摩擦力 となります）

滑り出す瞬間の加速度はどうでしょうか？

一旦、たがが外れると、動摩擦力は静止摩擦力より弱いので、いきなり有限の力が加わり、

加速度はゼロから突然有限の値$\ddot{x}=\dfrac{g}{l}(1+\mu')x_0-g\mu'=g\dfrac{\mu-\mu'}{1+\mu}$となります。

これを微分方程式の解の式$\ddot{x}(0)=A\alpha-B\alpha=2A\alpha$と見比べると、

III. 滑り出す瞬間の加速度: $\underbrace{\ddot{x} = g\dfrac{\mu-\mu'}{1+\mu}}_{運動方程式} = \underbrace{2\alpha A}_{解の表式}$

という関係が得られるので、

$\therefore A = \dfrac{g}{2\alpha}\dfrac{\mu-\mu'}{1+\mu}$ となります。これを $C = x_0 - \dfrac{2A}{\alpha}$ に代入して $\alpha = \sqrt{\dfrac{g}{l}(1+\mu')}$ を使って、

落ち着いて計算すると、

$$C = x_0 - \frac{g}{\alpha^2}\frac{\mu-\mu'}{1+\mu} = \frac{l\mu}{1+\mu} - \frac{l}{1+\mu'}\frac{\mu-\mu'}{1+\mu} = \frac{l}{1+\mu'}\frac{(\mu+\mu\mu'-\mu+\mu')}{1+\mu}$$

$$= \frac{l\mu'}{1+\mu'}\frac{\mu+1}{1+\mu} = \frac{l\mu'}{1+\mu'}$$

となります。この結果の $C = \dfrac{l\mu'}{1+\mu'}$ は x_0 の式で $\mu \to \mu'$ と書き換えただけなので、

「何かの長さ」に対応するはずです。実際、次元は長さになっています。

これを x_1 と書きましょう。すると、

$$x(t) = (x_0 - x_1)\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} + x_1 = (x_0 - x_1)\cosh\alpha t + x_1$$

という結果が得られます。

【結果】 等速運動でも等加速度運動でもない、見たことのない解です。

7　x_1 の物理的意味

$\therefore \underbrace{x(0) \equiv x_0}_{x_0の定義} = \dfrac{l\mu}{1+\mu}$ は、静止摩擦と重力の釣り合う位置でした。

・これは「この位置から滑り出す」という、目に見える釣り合い点です。

すると、$\mu \to \mu'$ と書き換えた $C = x_1 = \dfrac{l\mu'}{1+\mu'}$ は、動摩擦力と重力の釣り合うところになります。

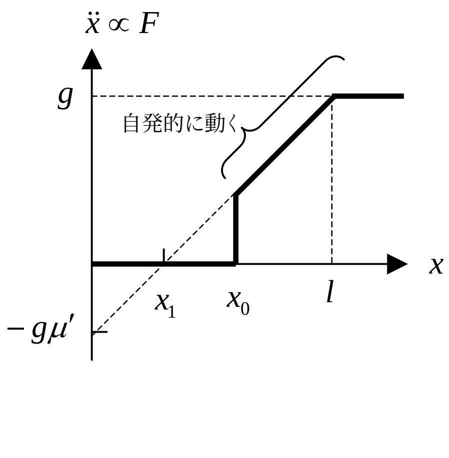
・これは残念ながら表だっては見えない点です。

【右のグラフ】

運動方程式 $\ddot{x} = \dfrac{g}{l}(1+\mu')x - g\mu'$

を使って、加速度の座標依存性を描いたもの。

滑り出す瞬間に、重力がかかり始め、垂れ下がる部分が長くなるに連れて、強く引かれるので加速度は増大。



8 cosh 関数

・グラフを書いてみよう。

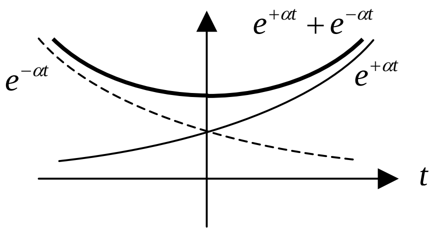
・sinh や tanh がどんな関数か予想してから、Google で調べてみよう。

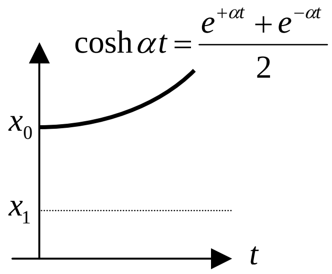
・$\cosh^2 x - \sinh^2 x$ を計算してみよう。

・微分してみよう。

・$x \to \pm\infty$ でどうなるか調べよう。$\cosh x \to e^{\pm x}$ と一致（「漸近する」と言います）

$\because \cosh x = e^{+x} + \underbrace{e^{-x}}_{x\to\infty\text{では無視可能}}$, $x \to -\infty$ では e^{-x} の方が小さくなって無視されます





9 完全に滑り落ちる点

$x = l$ となって落ちる点

$x(t) = (x_0 - x_1)\cosh \alpha t + x_1$

$l - x_1 = \dfrac{l}{1+\mu'}$ 及び $x_0 - x_1 = \dfrac{l}{1+\mu}\dfrac{\mu-\mu'}{1+\mu'}$ を使うと、

$$\frac{l}{1+\mu'} = \frac{l}{1+\mu}\frac{\mu-\mu'}{1+\mu'}\cosh \alpha t$$

$$\therefore\ 1 = \frac{1}{1+\mu}\frac{\mu-\mu'}{1}\cosh \alpha t$$

$\therefore\ \cosh \alpha t = \dfrac{1+\mu}{\mu-\mu'}$ となる時刻。確かに、右辺>1 なので OK

これを $t =$ にするのは簡単なクイズなので各自宿題。