ポテンシャルとエネルギー保存則

力学の参考書 植松恒夫(学術図書)、小出昭一郎(裳華房)、ランダウ(東京図書)

1 仕事とは

$W = f_{\mathrm{ext}}\, x$ ＝外力×引いた距離＝「f が物体(質点, *etc.*)にする仕事」

・仕事をしない＝どちらかゼロ $\begin{cases}\text{動かない}\left(\text{固定された壁を押す}\right)\\ \text{力が不要}\left(\text{氷の上で物をゆっくり動かす}\right)\end{cases}$

$\boxed{\text{・今日の話では、釣り合いを殆ど保ったままゆっくり引っ張るとする}\ \lim \upsilon \to 0}$

仕事の単位[J]=[N・m]=[W・s]

例)1 ジュール　　　　　【復習】下の三例を式で表せ

＝約 102g のものを 1m 上へ持ち上げる仕事

＝静止している 1kg のものを約 1.414m/s に加速する仕事

＝1W の電灯を 1 秒間だけ点灯するのに必要なエネルギー(自転車のライトは 6W)

2 力が途中で変化する場合

少しずつ加えて行けば良い(力は一定とみなせるような短い距離 Δx に区切って足す)

$$W = \underbrace{f_1\,\Delta x}_{\Delta W_1} + \underbrace{f_2\,\Delta x}_{\Delta W_2} + \underbrace{f_3\,\Delta x}_{\Delta W_3} + \cdots + \underbrace{f_N\,\Delta x}_{\Delta W_N} \quad \text{但し、} x = N\cdot\Delta x,\ \Delta W_i = f_i\,\Delta x$$

$\therefore$ 積分 $W = \int_0^x f(x)dx$　　力 f は x によって変わるとするので $f(x)$ と書いた

3 ポテンシャルエネルギーと力 ― 例をいくつか挙げる

3-1 バネをのばす

外力は $f_{\mathrm{ext}} = kx$ なので $W = \int_0^x kx\,dx = k\int_0^x x\,dx = \dfrac{k}{2}x^2$ ＝バネのポテンシャルエネルギー U

⇒ 仕事がポテンシャルエネルギーとして蓄えられた

注)なぜ二乗か―伸ばすほど力がかかるので、同じ距離だけ引いても、

伸ばした状態の方がより多く仕事をしなければならない

x だけ伸ばした状態からもうちょっとだけ引っ張ってみると、

$$\delta U = \int_x^{x+\delta x} kx\,dx = \frac{k}{2}(x+\delta x)^2 - \frac{k}{2}x^2 \approx k\,x\,\delta x$$

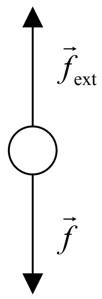
注)「ちょっとだけ」＝δx、　δは微小量、Δは有限な差を表すことが多い

注)最後の近似式は、δxが十分に小さいと$x\delta x >> \frac{1}{2}\delta x^2$が成り立つことを使った。

微小の長さだけ動かしたときに、ポテンシャルエネルギーが変化する割合は、

$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta U}{\delta x} = \frac{dU}{dx} = kx$　となって「力 $f = kx$」と一致する。他の場合でもそうだろうか。

3-2 地表での重力



$f_{\rm ext} = mg$ (一定値)と見なせるのでバネより簡単そう。

$\therefore W = \int_0^x mg\,dx = mgx$ ＝位置エネルギーU

⇒ 仕事が位置エネルギーとして蓄えられた

xの位置から、もうちょっとだけ持ち上げて見ると、

$$\delta U = \int_x^{x+\delta x} mg\,dx = mg\delta x$$

となる。微小の長さだけ動かしたときに、ポテンシャルエネルギーが変化する割合を調べると、

$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta U}{\delta x} = \frac{dU}{dx} = mg$　となって、これも力と一致する。もう一つ他の例でも確かめよう。

3-3 クーロン力

外力 $f_{\rm ext} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\alpha}{x^2}$ で釣り合う。　但し、$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\left(\mathrm{Fm}^{-1}\right) \approx 8.85 \times 10^{-12}$

同符号の電荷を$x = \infty$から近づけて行く。外力fの方向は、x軸に対して負の方向なので

符号にマイナスを付けて、、

$W = \int_\infty^x -\frac{\alpha}{x^2}dx = -\alpha\int_\infty^x \frac{dx}{x^2} = \alpha \left.\frac{1}{x}\right|_\infty^x = \frac{\alpha}{x}$ ＝位置エネルギーU

【注】どうしてこの問題だけ$x = \infty$からなのか？

∵ $x = 0$では$U = \infty$である。∞をUの基準値にするのはいろいろ面倒。

この例もxの位置からちょっとだけずらして見ると、

$\delta U = U(x+\delta x) - U(x) = \int_x^{x+\delta x} \frac{-\alpha}{x^2}dx = -\alpha \cdot \left(\frac{1}{(x+\delta x)} - \frac{1}{x}\right)$　となるが、、、、

3-4 テイラー展開

右図より、δx が小さい場合、部分的(よほどヘンな関数でなければ) に 直線で近似できる。その直線の傾きが「微分」。

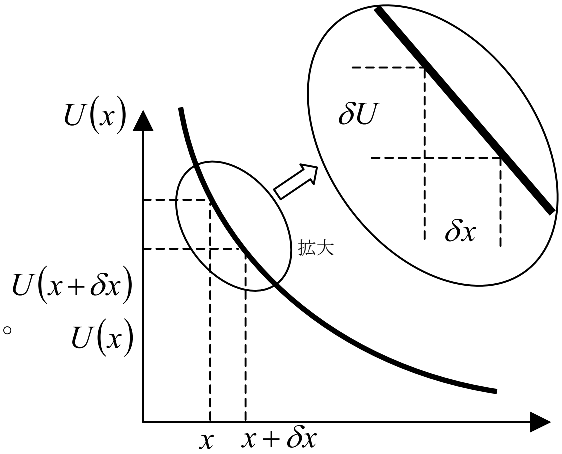
よって、

$U(x+\delta x) \approx U(x)+U'(x)\delta x$ ⇦ <u>これを一次のテイラー展開と言う。</u>

具体的に先ほどの $U(x)=\alpha/x$ について計算してみると、

$$U(x+\delta x)=\frac{\alpha}{x+\delta x}=U(x)+U'(x)\delta x$$

$$=\left(\frac{\alpha}{x}\right)+\left(\frac{\alpha}{x}\right)'\delta x=\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha}{x^2}\delta x$$



となるので、ポテンシャルエネルギーの変化は、

$$\delta U=U(x+\delta x)-U(x)=-\frac{\alpha}{x^2}\delta x$$

と簡単な式で書ける(そのためのテイラー展開なのだ)。

$\therefore \frac{\delta U}{\delta x}=-\frac{\alpha}{x^2}$ となって、またまた力 $f_{\text{ext}}=-\frac{\alpha}{x^2}$ と一致。

4 ポテンシャルエネルギーと力の一般的な関係

外力のした仕事がポテンシャルエネルギーに蓄えられるので、

注)もし見なせなさそうなら δx をもっと短くしよう

$$W=\int_{x_1}^{x_2} f_{\text{ext}}\,dx=U(x_2)-U(x_1)$$

もし、$x_2=x_1+\delta x$ と、微小長さだけ動かせば、その間の「力」は一定と見なせるから、

$$\therefore \int_{x_1}^{x_1+\delta x} f\,dx \approx f\delta x=U(x_1+\delta x)-U(x_1)$$

δx で両辺を除せば、$f_{\text{ext}}=\dfrac{U(x_1+\delta x)-U(x)}{\delta x}$

$\delta x\to 0$ の極限を取れば、$f_{\text{ext}}=U'(x)$ ― $\boxed{\text{ポテンシャルの微分と等しい外力で釣り合う}}$

【要注意】$\therefore$ ポテンシャルによる力は $f=-f_{ext}=-U'(x)$

このようにポテンシャルの微分で表される力を、「ポテンシャル力」 *or* 「保存力」と言う。

⇔ 保存力でない力とは。 摩擦力、空気抵抗、時間的に振動する電場、*etc.*

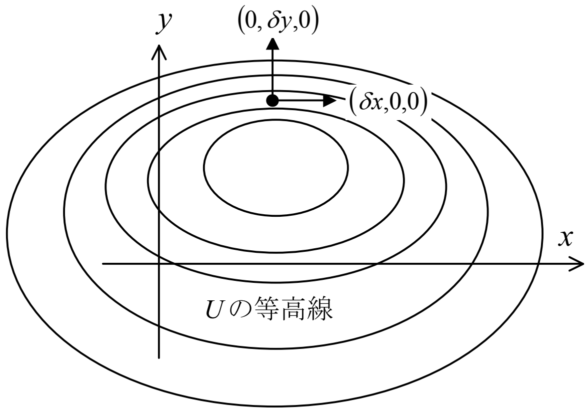
5 三次元空間でのポテンシャル

僅かに場所をずらした際の U の変化を調べよう。

$\delta\vec{x}$ の方向によって δU の大きさは異なる。

xyz 方向は、各々

$$\begin{cases} \delta U_x = U(\vec{x} + (\delta x, 0, 0)) - U(\vec{x}) \\ \delta U_y = U(\vec{x} + (0, \delta y, 0)) - U(\vec{x}) \\ \delta U_z = U(\vec{x} + (0, 0, \delta z)) - U(\vec{x}) \end{cases}$$



ポテンシャルの例(二次元の場合)

右図だと、$\delta U_x << \delta U_y$ である

（x 方向に進んだ方が、段差が少ない）

変化率は、

$$\boxed{x\text{ に進んだときの変化率} = \frac{U(\vec{x} + (\delta x, 0, 0)) - U(\vec{x})}{\delta x}}$$

となる。これを、$\dfrac{\partial U}{\partial x}$ と書いて「U の x による偏微分」と言う。

【覚え方】x 以外の変数を全部定数だと思って x で微分すればよい

偏微分を使うと、上の $\delta U_x, \delta U_y, \delta U_z$ は、

$$\delta U_x = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x \quad , \quad \delta U_y = \frac{\partial U}{\partial y}\delta y \quad , \quad \delta U_x = \frac{\partial U}{\partial z}\delta z$$

と書ける。

【注意】$\dfrac{dU(x, y, z)}{dx}$ を全微分と言う。

もし、y, z が全く x に依存していない（＝無関係）ならば、

$$\frac{dU(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}$$

もし依存していると、

$$\frac{dU(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

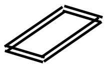
※依存しているかどうかは、<u>問題をかなり良く読まないとわからない場合が多い</u>

今の話では全く依存していないとしている。

6 一般の方向 $\delta\vec{x}=(\delta x,\delta y,\delta z)$ にずらしたときのポテンシャルの変化（本日のハイライト）

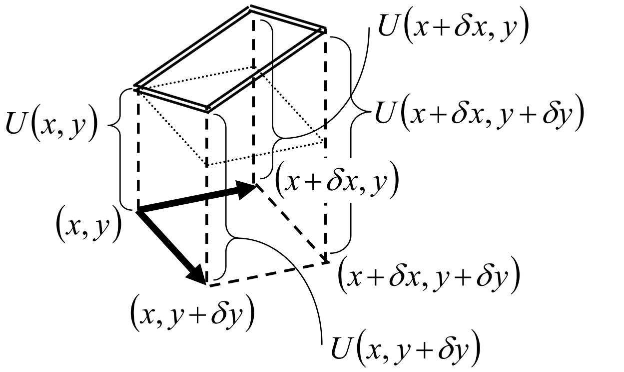
三次元では図示しにくいので、二次元 $\delta\vec{x}=(\delta x,\delta y)$ の場合で考える。

$\delta x,\delta y$ が小さい場合、上面を「平行四辺形」で近似できる（本当は曲面）。

すると、 

$U(x+\delta x,y+\delta y)-U(x,y)=\delta U_x+\delta U_y$

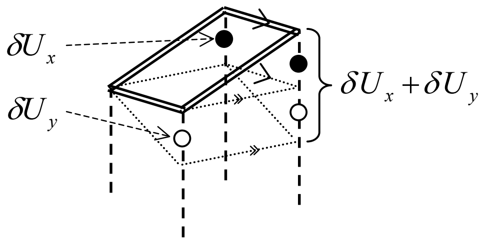
と単純な和となる（右下図の●＋○の和の長さ）。



三次元だと絵には描けないが、

$U(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)-U(x,y,z)=\delta U_x+\delta U_y+\delta U_z$

となる。左辺を δU と書くと偏微分を使って



$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z$$

ここで、$\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ というベクトルを考えると、

$$\therefore \delta U=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cdot\delta\vec{x}$$

と書ける。このベクトルを $\vec{\nabla}U,\ \frac{\partial U}{\partial \vec{x}}$ などと書く。前者は nabla とか、del と呼ばれる。

【余談】nabla と言う呼び名はギリシャ語のハープに由来するらしい。

7 三次元ポテンシャルと力

質点を微小距離（びしょうきょり）だけ動かすときの外力 $\vec{f}_{\text{ext}}$ のなす仕事 δW は、エネルギー保存則から、

$$\delta W=\delta U$$

を満たすはず。すると、たった今、説明したように、$\delta U=\vec{\nabla}U\cdot\delta\vec{x}$ なのであるから、

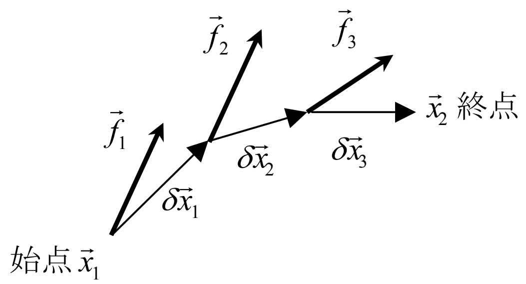
$$\delta W=\underbrace{\vec{\nabla}U}_{=\vec{f}_{\text{ext}}=-\vec{f}}\cdot\delta\vec{x}$$ と書けて、$\vec{f}_{\text{ext}}$ は $\vec{\nabla}U$ と等しいことがわかる。

【余談】よって、直ちにわかることは、押した力と垂直に動いたら、仕事にならない。

例）磁場によるローレンツ力 ⇒ 進行方向と垂直に力 ⇒ 磁場は仕事をしない

8 三次元ポテンシャルと仕事

$\vec{f}_{\mathrm{ext}}$ と $\delta\vec{x}$ の内積を取りながら足して行くと「仕事」が求められる。



$$\delta W_i = \vec{f}_i \cdot \delta\vec{x}_i \xrightarrow{\text{積分}} W = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{f}_{\mathrm{ext}} \cdot d\vec{x}$$

【疑問】ベクトルで積分なんて、具体的にどうやって計算するんだ？

【回答】$W = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{f}_{\mathrm{ext}} \cdot d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{\mathrm{ext}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{f}_{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}}_{\text{スカラー量}}\, dt$ のように、

変数変換して、積分変数と積分の中身をベクトルでなくしてしまえば簡単。

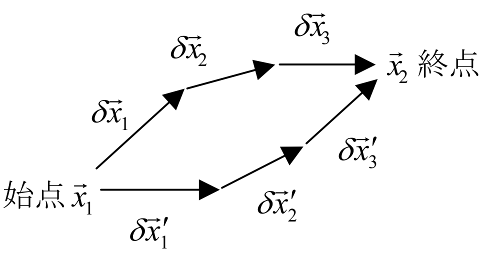
（ベクトルでない、一つの変数、数字のことを「スカラー」と言う）

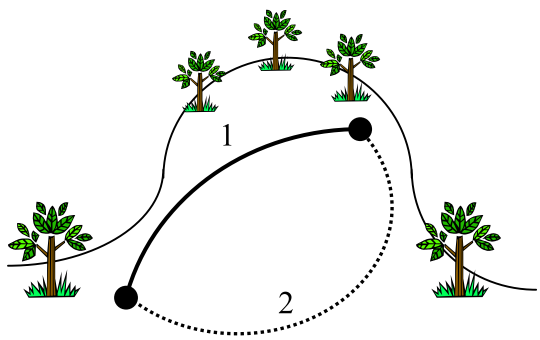
9 積分のみちすじによるポテンシャルエネルギーの違い

下図のように、多次元の積分はみちすじも考えないと行けない。

保存力の場合、エネルギー保存則より、$W = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} f_{\mathrm{ext}} \cdot dx = U(\vec{x}_2) - U(\vec{x}_1)$

$\therefore$ 始点 $\vec{x}_1$ と終点 $\vec{x}_2$ が決まれば、同じ場所に到達するので、





どう登っても同じ労力で上に到着する

ポテンシャルエネルギーの差は同じ。よって、経路に寄らず仕事は同じ。

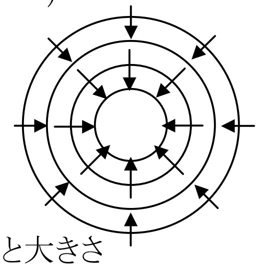
【注意】摩擦力は保存力でないので、こうは行きません。長い距離を引いた方が W は大きい。

10 三次元ポテンシャルの具体例（くどいようですが $\vec{f}=-\vec{f}_{\mathrm{ext}}$ に注意）

10-1 静電（せいでん）ポテンシャル（異符号の電荷）・万有引力ポテンシャル

$U(\vec{x})=-\dfrac{\alpha}{|\vec{x}|}$ より、$\vec{f}_{\mathrm{ext}}=\vec{\nabla}U=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\dfrac{-\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\alpha\cdot\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{(2x,2y,2z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$\therefore \vec{f}_{\mathrm{ext}}=\dfrac{\alpha\vec{x}}{|\vec{x}|^3}=-\vec{f}$　方向は原点方向。



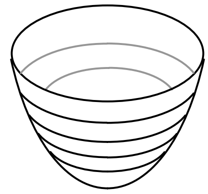
いつでもある一点（＝原点）を向いているので、「中心力」と呼ばれる。

$\vec{f}$ の方向と大きさ

10-2 地球上の重力

$U(\vec{x})=mgz$ より、$\vec{f}_{\mathrm{ext}}=\vec{\nabla}U=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)mgz=(0,0,mg)$　　一方向なので中心力ではない

10-3 どちらにでも引っ張られるバネ（普段（ふだん）は長さゼロに縮（ちぢ）まっている）



$U(\vec{x})=\dfrac{k}{2}|\vec{x}|^2$ より、$\vec{f}_{\mathrm{ext}}=\vec{\nabla}U=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\dfrac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)=k(x,y,z)=k\vec{x}$

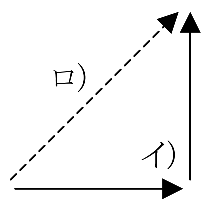
これも中心力

U を立体的に図示

10-4 $U(\vec{x})=\dfrac{k}{2}|\vec{x}|^2$ のポテンシャルに対して仕事が経路に寄らないことを示す

二次元平面上で、$(0,0)\to(1,1)$ まで移動するのに必要な仕事を求めてみる

$\vec{f}_{\mathrm{ext}}=\vec{\nabla}U=(kx,ky)$ であるから、、、



イ）$(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$ のように、水平、垂直に進む場合

$$W=\int_{(0,0)}^{(1,0)}(kx,ky)d\vec{x}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}(kx,ky)d\vec{x}$$

変数変換 $\vec{x}=(t,0)$　　　$\vec{x}=(1,t)$

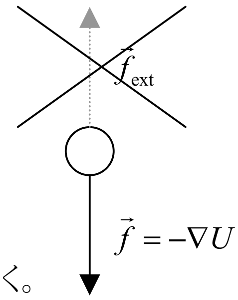
　　$\therefore d\vec{x}=(dt,0)$　　$\therefore d\vec{x}=(0,dt)$

$$\therefore W=\int_0^1(kt,ky)\cdot(1,0)dt+\int_0^1(1,kt)\cdot(0,1)dt=\int_0^1 kt\,dt+\int_0^1 kt\,dt=+\frac{k}{2}1^2+\frac{k}{2}1^2=+k$$

ロ) $(0,0)\to(1,1)$に直接、斜めに進む場合

$$W=+\int_{(0,0)}^{(1,1)}(kx,ky)d\vec{x}$$　　変数変換 $\vec{x}=(t,t)$　$\therefore d\vec{x}=(dt,dt)$

$$\therefore W=+\int_0^1(kt,kt)\cdot(1,1)dt=\int_0^1 2kt\,dt=k\cdot 1^2=k$$



11 ニュートンの運動方程式と仕事

ここからは釣り合いが破れる話。$\vec{f}_{\mathrm{ext}}=0$とする。

この場合、

「ポテンシャルが質点に及ぼす力＝$\vec{f}$」が、質点をどんどん加速(かそく)して行く。

$\vec{f}$のする仕事を求めよう。簡単のため、一次元とする。

fによって質点がどのように加速されるかは、ニュートンの運動方程式で決まるので、、

$$\left.\begin{array}{l} W=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx \\ \quad\uparrow \\ f=ma=m\dfrac{d^2x}{dt^2}\end{array}\right\}$$ ニュートンの運動方程式を仕事の式に代入

変数変換して、

$$\therefore W=m\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dx\xrightarrow{\text{変数変換}\,x\to t}=m\int_0^t\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}dt$$

注）変数変換に合わせて積分範囲もちゃんと変える。時刻$0\sim t$での座標は$x_1\sim x_2$

ここで、$\dfrac{dx}{dt}=\upsilon$なので、

$$W=m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\upsilon}{dt}\cdot\upsilon dt=m\int_{t_1}^{t_2}\upsilon\cdot\frac{d\upsilon}{dt}dt$$

となる。さらに$t\to\upsilon$と変数変換(へんすうへんかん)してやると、

$$=m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\upsilon\,d\upsilon=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$$

注）変数変換に合わせて、積分範囲も$0\sim t\to x_1\sim x_2\to\upsilon_1\sim\upsilon_2$と変えている

なんと、運動エネルギーが出て来る。

以上より、$W=\dfrac{m\upsilon_2^2}{2}-\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$ ⇒ 仕事＝運動エネルギーの変化

一方、$W=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx=\int_{x_1}^{x_2}-U'(x)dx=\int_{U(x_1)}^{U(x_2)}-dU=U(x_1)-U(x_2)$

なので、$W=\dfrac{m\upsilon_2^2}{2}-\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}=U(x_1)-U(x_2)$

$\therefore \dfrac{m\upsilon_1^2}{2}+U(x_1)=\dfrac{m\upsilon_2^2}{2}+U(x_2)$ となる。この式は任意の $x_1,\, x_2$ で成り立つのだから、

いつでも一定になる。$\boxed{\text{エネルギーの保存則}}$

これを "E" と置くと、$E=\dfrac{m\upsilon^2}{2}+U(x)$ が成り立つ。

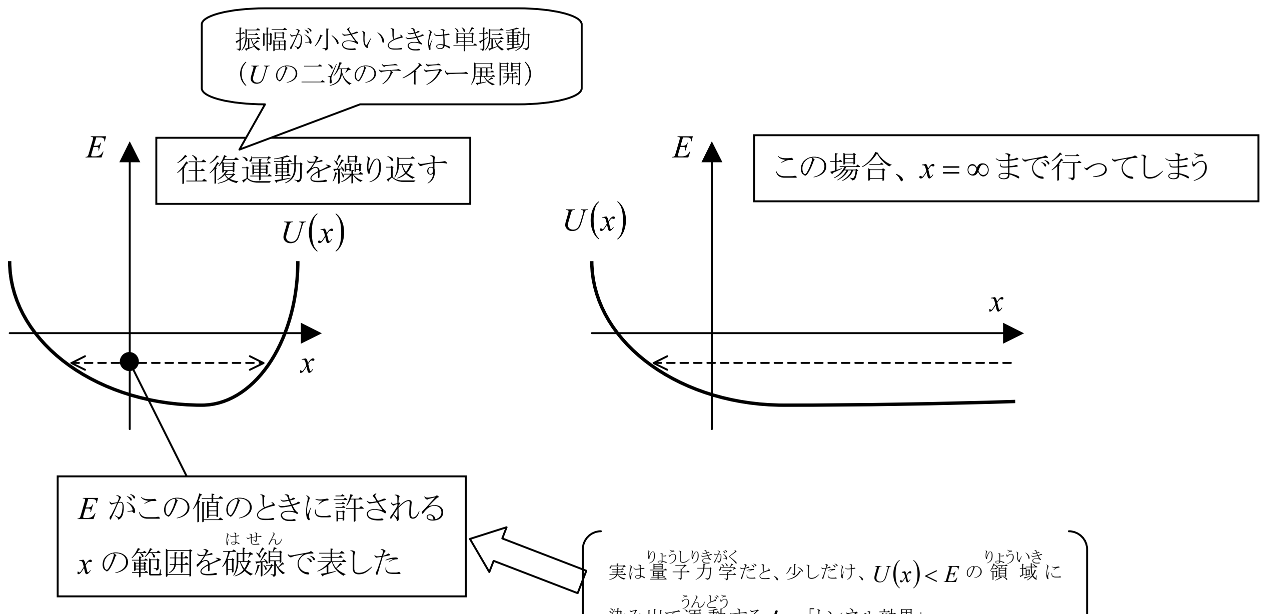
※エネルギーの保存則は相対性理論でも量子力学でも成り立つ

⇒ もちろん、そっくり同じ式ではない。相対性理論では有名な mc^2 を含んだ式になるし、量子力学では「波動関数」に対する式になっている。

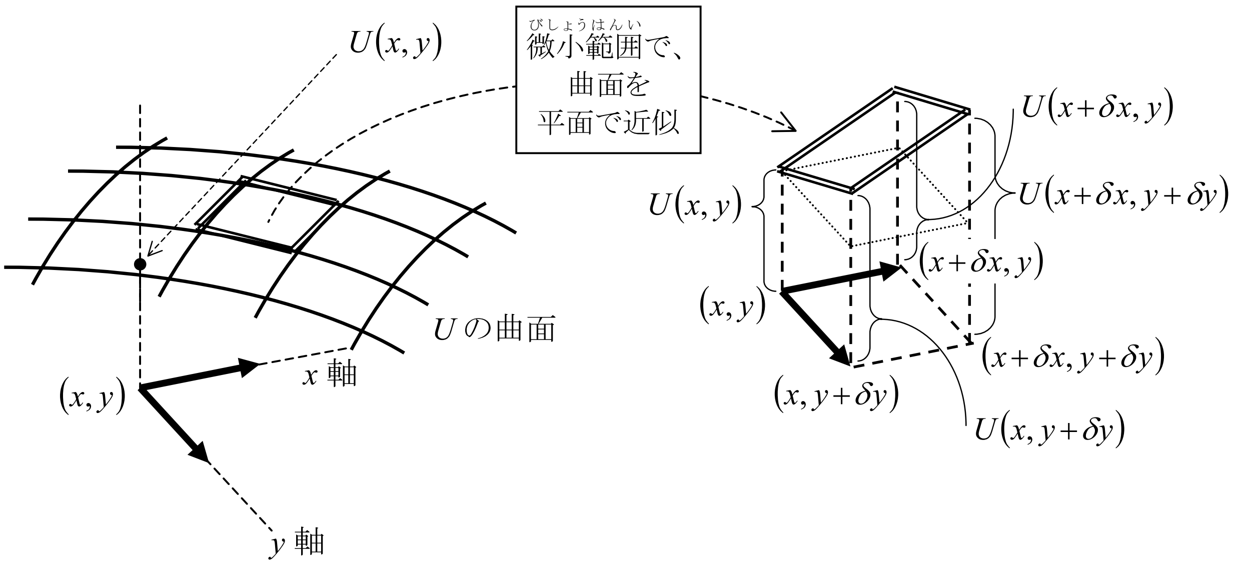
12 運動できる座標の範囲

$E=\dfrac{m\upsilon^2}{2}+U(x)$ を変形すると、$\dfrac{m\upsilon^2}{2}=E-U(x)>0$ となる（$\because \upsilon^2>0$）ので、

$E-U(x)>0$ を満たす x の範囲でのみ運動が可能。どういう運動かは $U(x)$ の形による。



配布資料 三次元の関数のテイラー展開（てんかい）



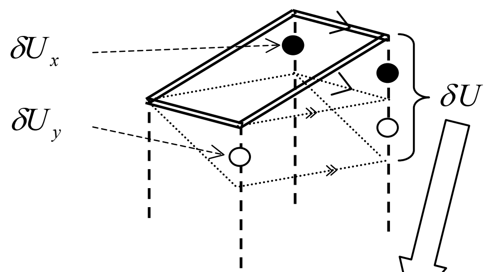
一般の方向 $\delta\vec{x}$ に進んだときの U のずれ

$$\delta U = U(x+\delta x, y+\delta y) - U(x,y)$$

x, y 軸（じく）方向へ進んだときの U のずれ

$$\delta U_x = U(x+\delta x, y) - U(x,y)$$

$$\delta U_y = U(x, y+\delta y) - U(x,y)$$



【結論】
δU は、$U(x,y)$ を平面で近似したので、$\delta U_x + \delta U_y$ と単純（たんじゅん）な和になる

【レポート】

1．以下のポテンシャルのナブラを計算し、xy 平面に力 $\vec{f} = -\nabla U$ の方向矢印で表してみよう。

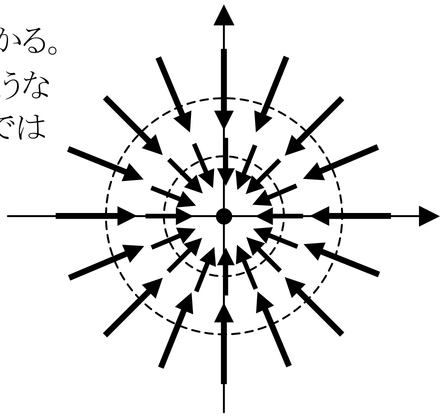
例）$U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$：全方向へのびるバネ

$-\nabla U = \left(-\frac{\partial}{\partial x}U, -\frac{\partial}{\partial y}U\right) = \left(\frac{1}{2}k(2x), \frac{1}{2}k(2y)\right) = (-kx, -ky)$

なので、すぐに、$-\nabla U(0,0) = \vec{0}$，$-\nabla U(1,1) = (-k, -k)$などがすぐわかる。これを xy 面に矢印で書き込めば良い。k の値は矢印が描きやすいような適当な長さにして良いです(矢印の長さが 1m だったり、1 μ だったりでは描けないですね)。

あと、$|-\nabla U| = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2+y^2} = kr$

（但し、r は原点から(x,y)までの距離）なので、原点から等距離にある点、すなわち、円周上では矢印の長さが等しいことがわかります。



$U(x,y) = a$　：水平な平面

$U(x,y) = ax$　：x 軸方向に傾斜した平面

$U(x,y) = \dfrac{-a}{\sqrt{x^2+y^2}}$　：深さが∞の穴（＝重力ポテンシャル）

$U(x,y) = a\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{b^2}\right)$　：山の形　　　$U(x,y) = a\sin\dfrac{x}{b}$　：y 軸に平行に波打った波板（なみいた）

$U(x,y) = xy$：私にも何だかわかりませんがぜひやってみましょう。

2．　線積分に慣れよう