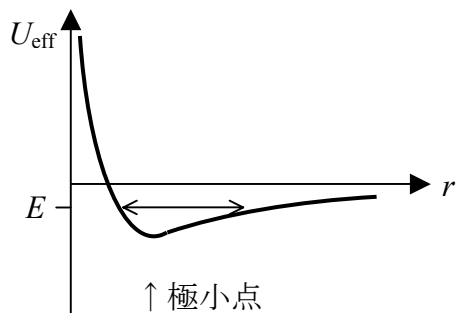


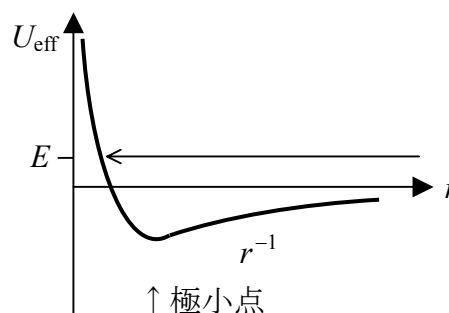
ラザフォード散乱

1 同符号の電荷粒子のクーロンポテンシャル

重力場(引力)の運動ではエネルギーの値によって異なる運動になった。



$E < 0$ の場合は有限範囲で運動(楕円を真横から見たようす)



$E > 0$ の場合は無限遠に飛び去る

左は、地球など、楕円軌道を描いている天体。だんだん、 E が上がって来ると遠くまで行って帰って来る(Halley Comet、76 年周期)ようになり、もっと高エネルギーだと、二度と戻って来ない(実際、そういう彗星も沢山ある)。

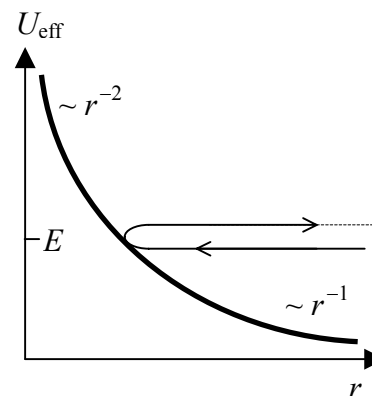
今回はポテンシャルが斥力 $U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r}$ の場合を考え

えます。但し $\alpha = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 > 0$

右図のように任意の E に対して、

「一旦近づいて来て遠ざかり、二度と戻らない」

という運動をする。これを 散乱 (scattering) といいます。



2 散乱

電子や原子核、波(古典的な波、電磁波、光)

も散乱する。コンプトン散乱は、電子と光との散乱。

今回説明するのは古典的な粒子(質点)同士の散乱である「ラザフォード散乱」。

1911 年に英国のラザフォード卿が金箔にアルファ線(陽子)を

照射すると、8000 個に 1 個くらいの割合で、強く曲げられることを発見しました。

これは、原子の内部に何か硬い点があることを示しており、当時信じられていた

トムソンモデル(負電荷を持った電子が正電荷のかたまりの中に浮かんでいると言う「ぶどうパン」のようなモデル、左図)が誤りで、右図のようにになっていることを明らかにしました。



3 散乱の場合の軌道

【前回と α の項の符号以外は全く同じ】

Start: エネルギー保存則 $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mu}{2} r^2 \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2}_{U_{\text{eff}}} + \frac{\alpha}{r}$

角運動量保存則 $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ を $\dot{r} = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt}$ に代入して $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2}$
合成関数の微分の一般公式

変数変換 $r = \frac{1}{u}$

変数分離 $d\theta = \frac{du}{\pm \sqrt{-u^2 - \frac{2\alpha\mu u}{L^2} + \frac{2\mu E}{L^2}}}$ (分母を完全平方する)

変数変換 $u + \frac{\alpha\mu}{L^2} = x$ (ここで、 $\frac{\alpha\mu}{L^2} = l^{-1}$ と置くと、 $r^{-1} + l^{-1} = x$)

Goal: $\theta = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm \arccos \frac{x}{a}$ 但し、 $a = \sqrt{\frac{\alpha^2 \mu^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}$

$\therefore \cos \theta = \frac{x}{a} = \frac{r^{-1} + l^{-1}}{a}$ であるから、 $\therefore a \cos \theta - l^{-1} = r^{-1}$ となつて、

$r = \frac{1}{a \cos \theta - l^{-1}} = \frac{l}{l a \cos \theta - 1} = \frac{l}{\varepsilon \cos \theta - 1}$ 但し、 $\varepsilon = l a$

ここで $\varepsilon = \frac{L^2}{\alpha\mu} \sqrt{\frac{\alpha^2 \mu^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$ となるので常に $\varepsilon > 1$

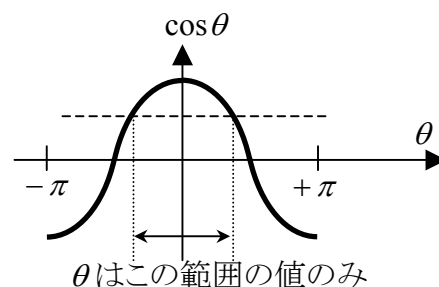
注) $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mu}{2} r^2 \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2}_{U_{\text{eff}}} + \frac{\alpha}{r}$ は全て正なので、 $E > 0$ しか有り得ない

4 $\epsilon > 0$ の軌道の形

4-1 変数の範囲

$r > 0$ なので、 $\frac{r}{l} = \frac{1}{\epsilon \cos \theta - 1} > 0$ 、よって、 $\epsilon \cos \theta > 1$

$\therefore \cos \theta > \frac{1}{\epsilon}$ ($\theta = -\arccos \epsilon^{-1} \sim +\arccos \epsilon^{-1}$)



よって、 r の取り得る範囲は、 $r = \frac{1}{\epsilon - 1} \sim \infty$

4-2 デカルト座標への変換 ($r, \theta \rightarrow x, y$)

目標: $r = \frac{l}{\epsilon \cos \theta - 1}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ から、 r, θ を消去

• 第一式から、 $\cos \theta = \epsilon^{-1} (l/r + 1) = (l+r)/\epsilon r$

• 第二式に代入して $\cos \theta$ を消去する。 $x = r \cos \theta = \frac{l+r}{\epsilon}$, $\therefore r = \epsilon x - l$

• 第三式に代入して r と $\sin \theta$ を消去する。 $y = r \sin \theta = (\epsilon x - l) \cdot \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{l+r}{\epsilon r} \right)^2} \right)$

$$= \pm (\epsilon x - l) \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon x}{\epsilon (\epsilon x - l)} \right)^2} = \pm \sqrt{(\epsilon x - l)^2 - x^2}$$

Goal: $y = \pm \sqrt{(\epsilon^2 - 1)x^2 - 2l\epsilon x + l^2}$

4-3 デカルト座標による軌道の式

この式は、 $y^2 = A^2 x^2 - 2Bx + C^2$ という形をしている。

$\Rightarrow x$ について完全平方の形に持ち込める

$$\sqrt{\dots} \text{ の中身} = (\epsilon^2 - 1) \left(x^2 - \frac{2l\epsilon x}{\epsilon^2 - 1} \right) + l^2 = (\epsilon^2 - 1) \left(\left(x - \frac{l\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{l\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 \right) + l^2$$

$$\therefore x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

括弧を取って、

$$= (\varepsilon^2 - 1) \left(x - \frac{l\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2 - \underbrace{\frac{(l\varepsilon)^2}{\varepsilon^2 - 1} + l^2}_{\frac{-l^2}{\varepsilon^2 - 1}}$$

最後の二項 $-\frac{(l\varepsilon)^2}{\varepsilon^2 - 1} + l^2$ を上のようにまとめると $-\frac{(l\varepsilon)^2 + (\varepsilon^2 - 1)l^2}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{-l^2}{\varepsilon^2 - 1}$ なので、

$$= (\varepsilon^2 - 1) \left(x - \frac{l\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2 - \frac{l^2}{\varepsilon^2 - 1}$$

これで、 $y = \sqrt{A^2(x - D)^2 - F^2}$ という形になった。

$$\text{但し、} D = \frac{B}{A^2}, \quad -F^2 = -A^2D^2 + C^2 = \frac{-B^2 + A^2C^2}{A^2} \propto -(l\varepsilon)^2 + (\varepsilon^2 - 1)l^2 = -l^2 < 0$$

4-4 軌道の形

$x - D = x - \frac{l\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} = X$, $y = Y$ と置くと、軌道を表す式は

$Y = \pm \sqrt{A^2X^2 - F^2}$ とさらに簡単になるので、これの性質を調べてみる。

イ) $|X| > F/A \quad \therefore X > F/A$ または $X < -F/A$

ロ) $X = F/A + \delta X$ とすると、 $Y = \pm \sqrt{2FA\delta X}/B \propto \sqrt{\delta X}$

$X = -F/A - \delta X$ としても、 $Y = \pm \sqrt{2FA\delta X}/B \propto \sqrt{\delta X}$

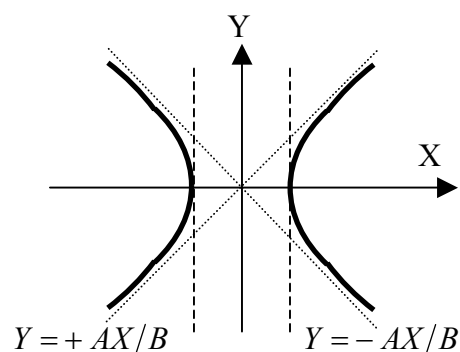
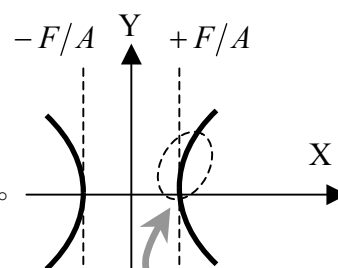
ハ) 逆に、 $X \rightarrow \pm\infty$ とすると、 $Y \rightarrow \pm \sqrt{A^2X^2}/B = \pm AX/B$

となり、 $Y = \pm AX/B$ の直線に漸近する。

この直線を漸近線ぜんきんせん(asymptotic line)と言う。

(変数を $\pm\infty$ にしたときに、徐々にある曲線に近づくこと)

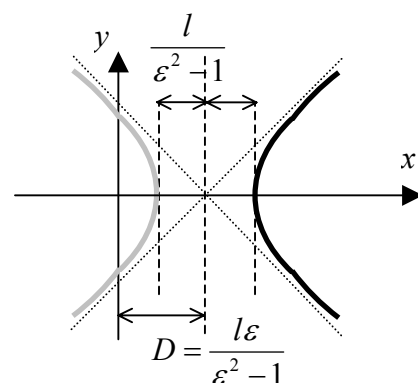
注) 徐々に、一定値に近づくのは「収束」という



5 元の座標で表した軌道

イ) 元の x 座標からのずれ、 $D = \frac{l\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$

ロ) 漸近線の勾配 $\pm \frac{A}{B} = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$



ハ) 極座標の式からは $r = \frac{l}{\epsilon \cos \theta - 1} > \frac{l}{\epsilon - 1} = \frac{l\epsilon + l}{\epsilon^2 - 1}$ なので、上図の黒色の曲線が軌道。

【注意】標的の粒子は xy 座標の原点(上図で中心から少し左側にずれたところ)

6 初期条件

標的は固定されているとすると $M \gg m$ なので、 $\mu = m$

二つの粒子を「ぶつける」(散乱させる)場合の初期条件は、もちろん、

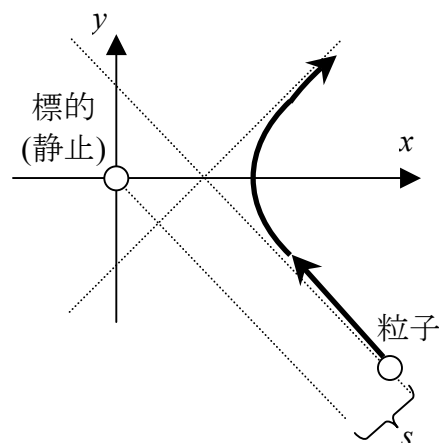
初期位置と初期速度

であるが、無限遠から来て再び飛び去るとすると、

無限遠での速さ v_∞

を初期条件に取るのがわかり易い。

もう一つの初期条件は右図のように粒子の軌道の漸近線と、それに平行で原点を通る直線との距離 s とするのが良い。



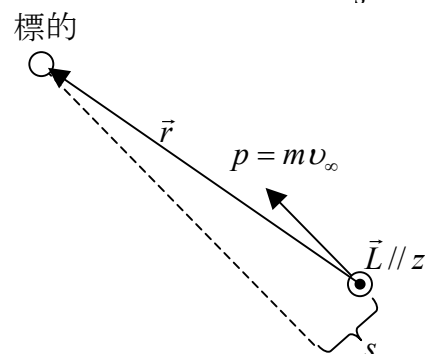
6-1 初期条件 v_∞, s と軌道の形の関係

イ) 全エネルギー $E = \frac{1}{2} m v_\infty^2$ \because ポテンシャルエネルギーはゼロ

ロ) 角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ は、まず、

z 軸に平行(紙面に垂直)で、

大きさは $(m v_\infty) \cdot \underbrace{(\vec{r} \text{ の } \vec{p} \text{ に垂直な成分})}_s = m v_\infty s$



この二つから、軌道の形を決めるパラメタ $l = \frac{L^2}{\alpha m}$, $\epsilon = l \sqrt{\frac{\alpha^2 m^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}$ が決まる。

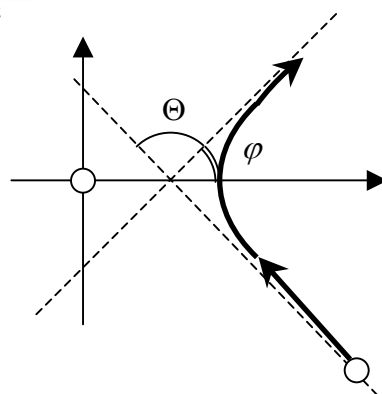
$$l = \frac{m^2 v_\infty^2 s^2}{\alpha m} = \frac{m v_\infty^2 s^2}{\alpha}$$

$$\epsilon = l \sqrt{\frac{\alpha^2 m^2}{(l \alpha m)^2} + \frac{2m}{l \alpha m} \left(\frac{1}{2} m v_\infty^2 \right)} = \sqrt{1 + \frac{l m v_\infty^2}{\alpha}} = \sqrt{1 + \frac{m^2 v_\infty^4 s^2}{\alpha^2}}$$

ハ) 漸近線の勾配は

$$\pm \tan \varphi = \pm \frac{A}{B} = \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \pm \frac{m v_\infty^2 s}{\alpha}$$

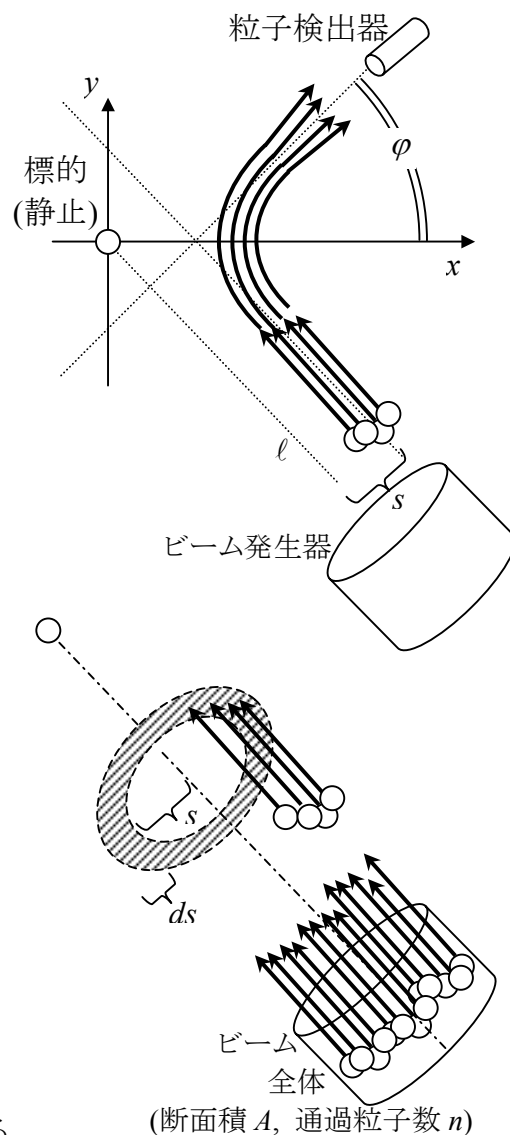
ニ) 散乱角(散乱前後での角度の変化) $\Theta = \pi - 2\varphi$



7 散乱断面積

原子や原子核、あるいはクォークの性質を調べるために、シンクロトロンなどの加速器から発射された粒子ビームを標的(固体)に照射する実験がよく行われる(右図)。

ここでは、その実験データ、「粒子がどの方向にどれだけ散乱されるか」をまとめる方法を考えよう。



7-1 ビーム強度(beam intensity)

ビームは平行に進む、同じ速度の粒子集団であるとする。

ビーム強度 j

=ビームに垂直な断面を単位時間に通過する粒子数 n である。その面の面積を A とすると、
 $\therefore j = n/A$ となる。

7-2 入射粒子の衝突パラメタと散乱されて出て行く方向

ビームに平行で標的に向かう直線 l からの距離が

$$s \sim s + ds$$

の範囲の円周の断面積 $d\sigma = 2\pi s ds$ に入る粒子集団を考える。

ds が十分小さければ、粒子集団は、殆ど同じ軌道を描いて飛んで行く。

粒子の軌道は、無限遠では漸近線に一致するので、

漸近線の角度を φ とすると、

$$\varphi \sim \varphi + d\varphi$$

の狭い範囲に入っていると考えて良いだろう

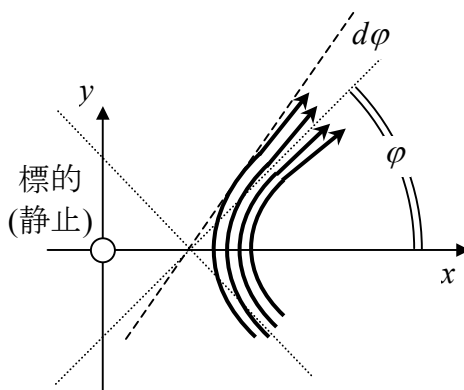
(\because 殆ど同じ軌道を描くのだから)。

その方向に出て行く粒子数を dn (φ の範囲が微小なので)

とすると、ビーム強度の定義より、

$$j = dn/d\sigma$$

となるはず。



7-3 実験データの整理

実験は、角度範囲 $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ 方向に散乱される粒子数 dn を測定する。

dn は φ に依存するので φ を少しずつ変えながら、 $dn = dn(\varphi)$ を測定して行くのだ。

当然のことながら出て来る粒子数は入射粒子数に比例するので、入射粒子数(ビーム強度)で割ってやった方が比較しやすい。

実際割ってやると、前項で導いた式より、

$$\therefore d\sigma(\varphi) = dn(\varphi)/j$$

となる。ここで、 $d\sigma(\varphi)$ を「微分断面積」という。

【注意】断面積の導関数という意味ではありません。