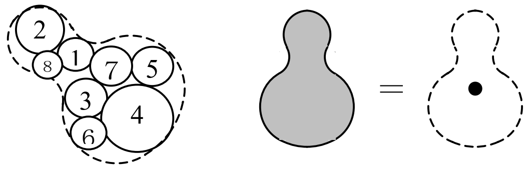
剛体（有限の大きさを持っていて硬（かた）い）の運動　　Goal：棒や球、コマなどの運動を調べる

剛体の定義：質点の間隔が変化しない

1. 剛体の運動量と角運動量を「複数の質点が集まったもの」として計算してみよう

1-1. 並進運動量



並進運動は、重心位置に $M=\sum_i m_i$ が集まったものと同じ

$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i = M\dot{\vec{R}}$ と書ける（復習・プリントNo.3）。

但し、重心座標 $\vec{R}=\dfrac{\sum_i m_i\vec{x}_i}{\sum_i m_i}$、$M=\sum_i m_i$

個別の粒子の運動量の時間変化は、$\dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\vec{f}_i}_{外力} + \underbrace{\sum_j \vec{f}_{ij}}_{内力}$ であるから、

$$\therefore \dot{\vec{P}}=\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \underbrace{\vec{f}_i}_{外力} + \overbrace{\sum_i \underbrace{\sum_j \vec{f}_{ij}}_{内力}}^{=0} = \vec{F}$$

（∵二項目が消えるのは作用反作用の法則）

但し $\vec{F}=\sum_i \vec{f}_i$ 外力の和

1-2. 角運動量

質点の角運動量— 定義 $\vec{l}_i=\vec{r}_i\times\vec{p}_i$，∴時間変化 $\dot{\vec{l}}_i=\underbrace{\dot{\vec{r}}_i\times\vec{p}_i}_{\propto\vec{v}\times\vec{v}=0}+\vec{r}_i\times\underbrace{\dot{\vec{p}}_i}_{\vec{f}_i+\sum_j\vec{f}_{ij}} = \vec{r}_i\times\vec{f}_i+\sum_j \vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}$

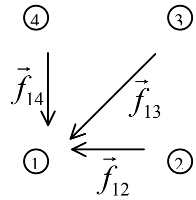
よって、$\dot{\vec{L}}=\sum_i \dot{\vec{l}}_i = \sum_i \vec{r}_i\times\vec{f}_i + \sum_i\left(\vec{r}_i\times\sum_j \vec{f}_{ij}\right)$

〔ここから計算のトリック〕

右辺第二項＝$\sum_i\sum_j \vec{r}_i\times\vec{f}_{ij} = \sum_j\sum_i \vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}$

i,j を入れ替えた

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_j\sum_i \vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}\right)$$



作用反作用の法則より、$\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$ であるから、

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_j\sum_i\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\times\vec{f}_{ij}\right)=0$$

和や積分の index 変数の名前は勝手に付けて良い。
$\int f(x)dx=\int f(z)dz=\int f(a)da$
$\sum_i x_i=\sum_t x_t=\sum_j x_j$
あたりまえのことだ。

$\because\ \vec{f}_{ij}$ は質点 $\vec{r}_j$ から質点 $\vec{r}_i$ への力なので、$\left(\vec{r}_j-\vec{r}_i\right) /\!/ \vec{f}_{ij}$ 　のはず。

以上より、角運動量の和についても内力は影響を及ぼさず、

$$\dot{\vec{L}}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{f}_i=\sum_i \vec{t}_i=\vec{T}$$

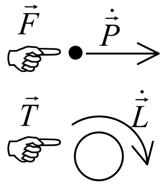
但し、$\vec{T}$ は外力によるトルク(torque)の和

となる。　　　　　　　　　　　　　（トルクは「力のモーメント」とも言う）

【比較】運動量の和の時間微分と、良く似た式（＝対称的）になっている。

$$\begin{cases}\dot{\vec{P}}=\vec{F}\\ \dot{\vec{L}}=\vec{T}\end{cases}$$

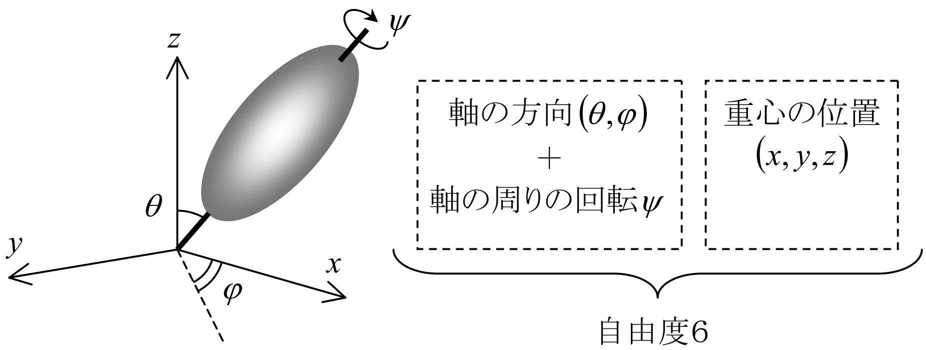
こういう「美しさ」に素直に感動しよう。



2. 剛体の自由度

いくつの変数（＝自由度）で、剛体の向きや位置を指定できるだろうか？

　　　c.f. 三次元空間における質点なら、自由度は当然、三つ。(x,y,z)



剛体の位置・方向決めを頭の中でやってみよう。

　　イ）剛体を置く場所を決める　　　　　　　　　　　$\boxed{\text{並進}}$

　　ロ）どこでも良いから軸を一本刺して、方向を決める　$\boxed{\text{回転}}$

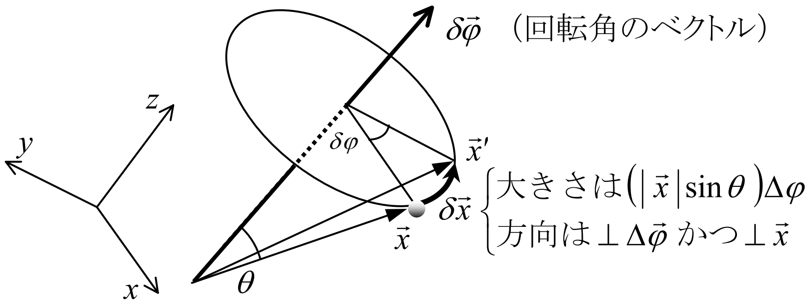
　　　さらに、その軸のまわりの回転角を決める

$\Rightarrow$ 任意の一本の軸で、剛体の方向は一意(unique)に決まるのだ。

3. 剛体の微小回転

剛体が微小時間 δt の間に、軸の周りに微小角 $\delta\varphi$ だけ回転したとする。

定義：$\boxed{\text{回転角ベクトル＝方向は回転軸にとる（右ねじ）}}$

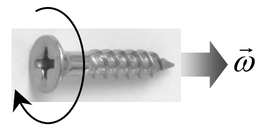


Z 軸は回転軸と平行にとる。
● は剛体の中の微小体積素辺

上図より、
$\therefore\ \delta\vec{x}=\delta\vec{\varphi}\times\vec{x}$ と書けることがわかる。

両辺を微小時間 δt で割ると、$\dfrac{\delta\vec{x}}{\delta t}=\dfrac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t}\times\vec{x}$

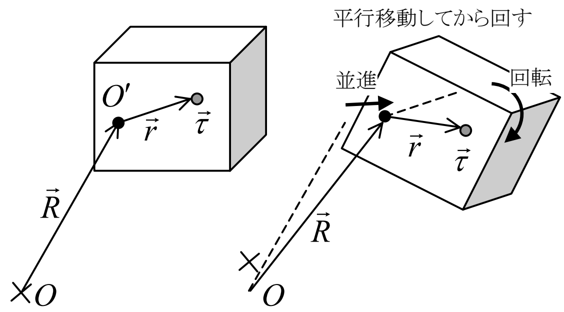
左辺＝速度 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{x}$ ＝右辺　　【注】角速度ベクトルの定義
方向は回転軸方向。右ねじ



4．角速度
角運動量は、原点の取り方で異なる値になった。だから、「○×の周りの角運動量」という風にどこを中心にするかはっきり言う必要があるのだ。
角速度はどうだろうか？
剛体の上の原点位置を変えた場合、$\vec{\omega}$ が変わるか調べる。

まず、剛体を、少しだけ $d\vec{R}$ 平行移動して少しだけ $d\vec{\varphi}$ 回転したとする

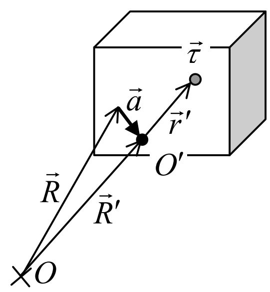
すると剛体上の点の位置 $\vec{\tau}$ は、$d\vec{\tau}$ だけずれる(右図)。



但し、$d\vec{\tau}=d\vec{R}+d\vec{\varphi}\times\vec{r}$ である。

ここで、剛体上の原点 O' を $\vec{a}$ だけずらしてみよう。
見方を変えるだけだ。
図より明らかに $\vec{R}+\vec{a}=\vec{R}'$, $\vec{a}+\vec{r}'=\vec{r}$ である。
さっきと全く同じだけ移動（並進、回転）させよう。

$$d\vec{\tau}=d\left(\vec{R}'+\vec{r}'\right)=d\vec{R}'+d\vec{\varphi}'\times\vec{r}' \quad \text{—A}$$



回転角は違って見えるのだろうか。
それを見るために、
原点をずらす前の式に、$\vec{a}+\vec{r}'=\vec{r}$ を代入すると、

$$d\vec{\tau}=d\vec{R}+d\vec{\varphi}\times\left(\vec{a}+\vec{r}'\right) \quad \text{—B}$$

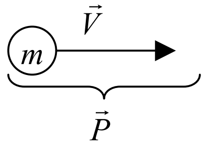
である。A, B どちらも $\vec{\tau}$ の変化を示しているが、元々同じ点なのだから一致していないといけない。
さらに、$\vec{\tau}$ は剛体の中の任意の点であるから、任意の $\vec{\tau}$ について一致しているはず。

よって、$\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'$ かつ $d\vec{R}=d\vec{R}'-d\vec{\varphi}\times\vec{a}$ が成り立っていなければならない。

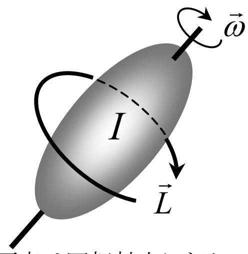
結論：回転角は剛体上の原点の取り方に依らない。

5．慣性モーメント

〔準備〕質点の場合、$\vec{P}=m\vec{V}$ だった。



運動方程式は、$\begin{cases}\dot{\vec{P}}=\vec{F}\\ \dot{\vec{L}}=\vec{T}\end{cases}$ というふうに対称的になっているのだから、



原点は回転軸上にとる
【注】角運動量は、必ず、原点を指定するのを思い出せ。

analogy を考えれば、
剛体の場合、$\vec{L}=I\vec{\omega}$ と書けるのではないか？
実際に剛体の角運動量を計算してみよう。

質点の角運動量は $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{\upsilon})=\vec{r}\times(m\vec{\omega}\times\vec{r})$ であるから、

剛体を質点の集まりと考えれば和 Σ で、質点の大きさを無限小 $d\vec{r}$ にすれば積分 $\int$ で、

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\int\rho(\vec{r})\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})d\vec{r}$$

（注 $d\vec{r}$ はスカラー量です）

と書けるはず。

ここで、並進運動（全ての $\vec{r}_i$ が同じ速度 $\vec{V}$ で動く）で L が変わるか調べよう。

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{\upsilon}_i)=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i=\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{V}$$

となるので、原点を重心に選べば、$\sum_i m_i\vec{r}_i=0$ となってどんな速度で並進しても

角運動量は変わらない。

これをベクトル解析の公式を用いて変形すると、

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\sum_i m_i\left(r_i^2\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right)$$ となる。

6．ベクトル三重積

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

スカラー三重積というのもある。$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ は、$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ の作る平行六面体（斜め四角柱）の体積

【考え方】（「力学」植松、学術図書出版社での説明）

1．$(B\times C)\perp$ BC 面

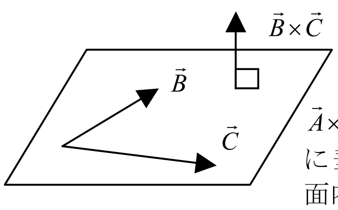
$\therefore\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ は、BC 面内 にある。

面内の二つのベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ とすると、この面内の任意のベクトル $\vec{r}$ は、$\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と書ける

よって、$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=x\vec{B}+y\vec{C}$ の形に書ける （x, y は定数）

2．$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\perp\vec{A}\ \Rightarrow\ \vec{A}\cdot\underbrace{\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)}_{x\vec{B}+y\vec{C}}=0$

よって、$0=x\vec{A}\cdot\vec{B}+y\vec{A}\cdot\vec{C}$ が成り立つ。



$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ は、$\vec{B}\times\vec{C}$ に垂直なので、BC 面内なのだ。

x, y の比の関係より、$x = \alpha(\vec{A}\cdot\vec{C}),\ y = \alpha(\vec{A}\cdot\vec{B})$ と書けるはず（α は定数）。

ここで、$\vec{A} = \vec{e}_x$，$\vec{B} = \vec{e}_x$，$\vec{C} = \vec{e}_y$ としてみれば、$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{e}_y$ であるから $\alpha = 1$

【別解】上の証明は「α = 一定」を仮定しているようなので疑問が残ります。地道に成分計算した方が良いかも。

$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_x$ を計算して、$(\vec{A}\cdot\vec{C})B_x - (\vec{A}\cdot\vec{B})C_x$ になっていることを確かめれば良い。

7．慣性モーメントテンソル

このベクトル三重積の公式を使うと、角運動量は

$$\vec{L} = \sum_i \underbrace{\vec{r}_i}_{A} \times \left(m_i \underbrace{\vec{\omega}}_{B} \times \underbrace{\vec{r}_i}_{C} \right) = \sum_i \left(r_i^2\right) m_i\vec{\omega} - \left(\vec{r}_i \cdot m_i\,\vec{\omega}\right)\vec{r}_i = \sum_i m_i \left(r_i^2\vec{\omega} - (\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i \right)$$

この和の中身を成分で書く。一気にやりたいところだが、地道に、地道に、、、

$$r^2\vec{\omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\vec{r} = \begin{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)\omega_x - (x^2\omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z) \\ (x^2+y^2+z^2)\omega_y - (yx\omega_x + y^2\omega_y + yz\omega_z) \\ (x^2+y^2+z^2)\omega_z - (xz\omega_x + yz\omega_y + z^2\omega_z) \end{pmatrix}$$

ひたすら地道に行く。

$$= \begin{pmatrix} (y^2+z^2)\omega_x - (xy\omega_y + xz\omega_z) \\ (x^2+z^2)\omega_y - (yx\omega_x + yz\omega_z) \\ (x^2+y^2)\omega_z - (xz\omega_x + yz\omega_y) \end{pmatrix}$$

;地道に $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ の順番をそろえてやると、

$$= \begin{pmatrix} (y^2+z^2)\omega_x & -xy\omega_y & -xz\omega_z \\ -yx\omega_x & (x^2+z^2)\omega_y & -yz\omega_z \\ -xz\omega_x & -yz\omega_y & (x^2+y^2)\omega_z \end{pmatrix}$$

となって、横の行はすべて ω_x, ω_y, ω_z が順番に並んでいる。

よって、これは行列とベクトル $\vec{\omega}$ の積で書けるはず（美しさに驚嘆しよう！）。

$$= \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

以上より、$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i\,\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right) = \left(\sum_i m_i R(\vec{r}_i)\right)\vec{\omega}$

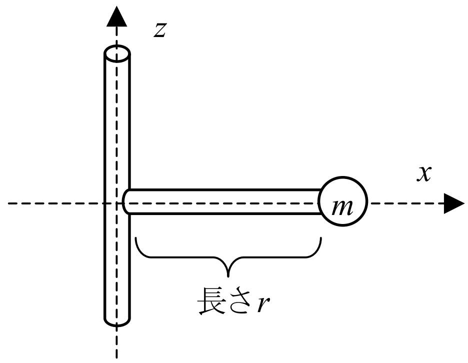
$$R=\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix}$$

線 型 代 数 を わ か っ て い る 人 は
$R=r^2-{}^t\vec{x}\,\vec{x}$ と書くこともできる。
但し、${}^t\vec{x}$ は縦ベクトル。
注) $\vec{x}\,{}^t\vec{x}$ は内積

となる。ここで、$I=\sum_i m_i R(\vec{r}_i)=\int \rho(\vec{r})R(\vec{r})d\vec{r}$ を慣性モーメント(moment of inertia)と呼ぶ。

【注意】I は行列である。$\vec{L}=I\vec{\omega}$ について $\vec{L}$ と $\vec{\omega}$ の方向は違うかも知れないのだ。同様な例はいくらでもある。オームの法則の $E=IR$ における「電気抵抗 R」も行列だ。運動方程式の $\vec{f}=m\vec{a}$ の m だって金属の中では行列なのだ。ここで大げさに驚け。

8. 慣性モーメントの求め方 I



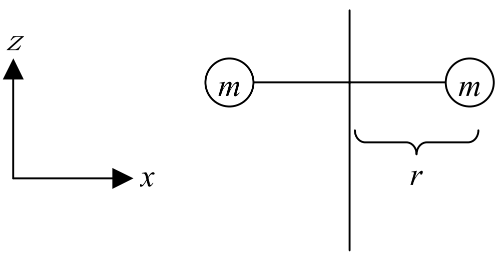
右図のように、軽い棒と質点でできた系を考えよう。
すると、質点はひとつなので、

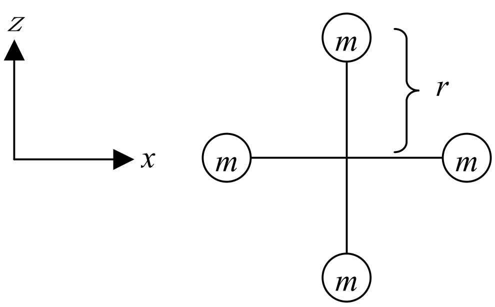
$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \text{なので、} I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}$$

となる。$\vec{\omega}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} // z$ ならば、$\vec{L}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\omega r^2 \end{pmatrix} // \vec{\omega}$ だし、 $\vec{\omega}=\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} // y$ でも、$\vec{L}=\begin{pmatrix} 0 \\ m\omega r^2 \\ 0 \end{pmatrix} // \vec{\omega}$ だ。

ところが、$\vec{\omega}=\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} // x$ だと、$\vec{L}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。これはいくら重くても回転半径が小さいと、楽にまわせることを意味している。(楽にまわせる＝たとえ回っていても角運動量にならないのだ)

9. 慣性モーメントの求め方 II (宿題)





以下の系の慣性モーメントテンソルを求めよ。

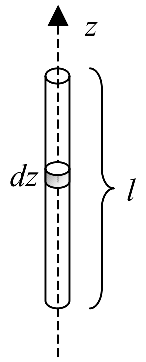
【やり方】$R=\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix}$

にそれぞれの質点の座標を代入して、$\sum R$ を計算。

(上の例では、和の項は 2 つ、下は、和の項は 4 つ)

10. 剛体の慣性モーメント

少数の質点の集まりではなく、剛体ならどうだろうか？
一番簡単な問題として「とても細い棒」を考えよう。
太さ 0 で、重さ m、長さ l とする（線密度は $\sigma = m/l$）。
右図の体積素片（長さ dz）を足し合わせて行けば良く、

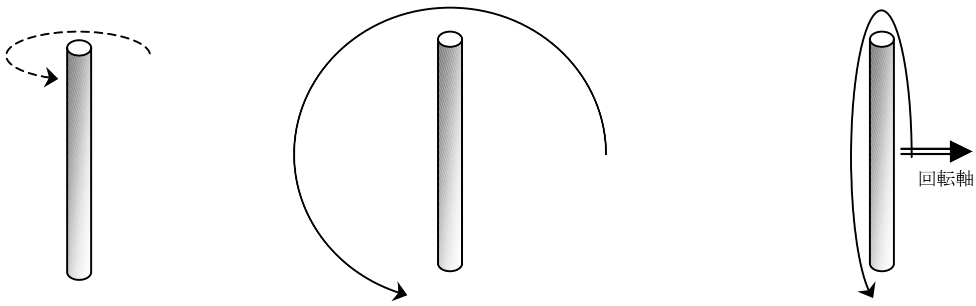


z 軸の周りに回しても
角運動量はゼロ
（回転半径ゼロだから）

$$I = \int_0^l \sigma\, dz \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{pmatrix}$$

の積分を計算するだけだ。太さ 0 なので、$x = y = 0$ となり、

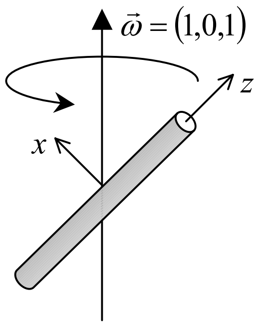
$$I = \int_0^l \sigma\, dz \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma l^3}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{m l^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



トルク不要で廻る。
（無限に細い棒なら）

いくらまわしても
角運動量はゼロ

どちらに廻す場合でも
同じトルク。
角度速度が同じなら、
同じ角運動量。



こういう場合はどうか？

$\Downarrow$

$\vec{\omega} = (1,0,1)$とすれば、
$\vec{L} = I\vec{\omega} \propto (1,0,0)$である。

$\vec{\omega}$と$\vec{L}$が異なる方向