KINOUSOUZOU 2011, 4/27, 0915-1045, 3-321

ラグランジアンとオイラーラグランジュ方程式の復習

イ） 記号と微分公式

・変数の上の点は、時間微分： $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

・∂（ラウンドディー）は偏微分： $\dfrac{\partial f(x,y)}{dx}$ は、y を定数だと思って、x についてのみ微分

・全微分の公式：$\dfrac{dg(x,y)}{dz} = \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\dfrac{dy}{dz}$

例）$g(x,y) = xy$ で、$x(z) = z^2$、$y(z) = z+1$ なら、$\dfrac{dg}{dz} = y\cdot 2z + x\cdot 1 = 2(z+1)z + z^2 = 3z^2 + 2z$

・微分公式： $\dfrac{df(g(z))}{dz} = \dfrac{df(g)}{dg}\dfrac{dg}{dz}$　　　積の微分： $\dfrac{df(z)g(z)}{dz} = f'g + fg'$

ロ）ラグランジアンの定義　$L = T - U$

但し、T は運動エネルギー、U はポテンシャルエネルギー

例）一次元運動する質点　$L = \dfrac{m}{2}\upsilon^2 - U(x)$

例）二次元運動する質点なら、$T = \dfrac{m}{2}|\vec{\upsilon}|^2$ 及び $U = U(x,y)$ に注意。

これの意味は、「関数 U は、x と y の二つの変数に依存していますよ」ということ。

ハ）オイラー・ラグランジュ方程式　$\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

例）上の場合だと、$\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}m\upsilon = -\dfrac{\partial U}{\partial x} - ma = 0$

ニ） 二次元のオイラーラグランジュ方程式

$\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$　及び、$\dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$　のように連立方程式となる。

【ラグランジアンとオイラー・ラグランジュ方程式から、運動方程式を求めよう】

1. 練習問題1　バネ定数 k のばねにつながれた質量 m の質点（一次元運動、変数は x）。
   ヒント　$T = \dfrac{m}{2}\dot{x}^2$ 及び $U = \dfrac{k}{2}x^2$

2. 練習問題2　ポテンシャルが全くない空間に置かれた質量 m の質点
   ヒント、前問よりやさしいはずだ。

3. 練習問題3　x 方向に坂になっている坂道を転がる質点（二次元運動、変数は x と y ）。
   ヒント　$T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$、及び、$U(x,y) = -bx$、但し b は定数。

4. 練習問題4　重力場中で二次元面内を運動する質点（二次元運動、変数は x と y ）
   ヒント、$T = \dfrac{m}{2}(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2)$、$U = \dfrac{-\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$　ただし、α は定数。

5. 上の問題を極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で書いてみよう（二次元運動、変数は r と θ）。
   ヒント、たとえば、$\dot{x} = r\cos\theta = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$ となる。

ラグランジアンとオイラーラグランジュ方程式の復習〔略解〕

6. 練習問題1 バネ定数 k のばねにつながれた質量 m の質点（一次元運動、変数は x）。

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2, \quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = kx - m\ddot{x} = 0$$

7. 練習問題2 ポテンシャルが全くない空間に置かれた質量 m の質点

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} = 0$$

8. 練習問題3 x 方向に坂になっている坂道を転がる質点（二次元運動、変数は x と y ）。

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \left(-mbx\right), \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mb - m\ddot{x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -m\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

注）ポテンシャル U を、位置エネルギ×質量＝ mU のように分けて書いてある。同じように、静電ポテンシャルも、$\phi = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$ のように電荷を入れて書くこともある一方、$\phi = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$ のように分けて書くこともある。次の問題 9, 10 もポテンシャルエネルギー＝ mU のように、分けて書いてある。

9. 練習問題4 重力場中で二次元面内を運動する質点（二次元運動、変数は x と y ）

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) - \left(\frac{-\alpha m}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{-\alpha m x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} - m\ddot{x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dfrac{-\alpha m y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} - m\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

10. 上の問題を極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で書いてみよう（二次元運動、変数は r と θ）。
ヒント、たとえば、$\dot{x} = r\cos\theta = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$ となる。

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \left(\frac{-\alpha m}{r}\right), \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr\dot{\theta}^2 - \dfrac{\alpha m}{r^2} - m\ddot{r} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \end{cases}$$

※二つ目の式は、$mr^2\dot{\theta} = M$（一定値）という、角運動量保存則。
実際、$mr^2\dot{\theta} = mr\upsilon = rp$ であり、お互いの方向 $\vec{r} \perp \vec{p}$ を考えると、
$= \left|\vec{r} \times \vec{p}\right|$ であり、確かに角運動量になっている。