上 智 大 学 試 験 問 題

試験日（Date of exam）	登録コード（Registration Code）
２０１３年１月３１日(木) ２限／３－３７１	SCT63400
科目名（Course Title）	担当者（Instructor）
熱統計力学	後藤貴行

〇担当者へのお願い/ Request for instructors ［下記の☐内にレ点をつけてください/ Please check one of the boxes below ］
＊試験場への持込/ Materials allowed for exams → ☐一切持込不可/ Not allowed
☑持込可/ Allowed （詳細は下記へ/ Check on the items to be allowed below ）
☐六法貸与/ Roppo prepared by law school

＊☐テキスト/ textbook ☑ノート/ notebook ☐参考書/ reference book ☐辞書/ dictionary ☐レポート/ report
☐電卓/ calculator ☐配布資料/ other materials ☐六法（判例・解説付きでなく書き込みが一切ないもの）/ Roppo
☐その他/ others ：
※持込資料補足/ Other comments, if any〔 〕

〇以下の各問において、途中の導出が重視されます。結果だけでは採点されません。

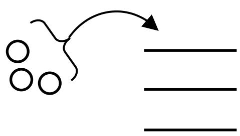
1. 二つのエネルギー準位$\varepsilon_1, \varepsilon_2$のエネルギー差が$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$である二準位系のエントロピー$S$，ヘルムホルツの自由エネルギー$F$，内部エネルギー$E$，比熱$C$の温度依存性を求め、グラフに描け。但し、横軸は温度$T = -\infty \sim +\infty$とする。

2. 同じ二準位系において、$\Delta\varepsilon$が磁場Bに比例（$\Delta\varepsilon = B\mu$，但しμは比例定数）し、各エネルギー準位$\varepsilon_1, \varepsilon_2$の占有数を$n_1, n_2$とするとき、磁化$M = (n_1 - n_2)\cdot\frac{\mu}{2}$と、磁化率$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$の温度依存性及び磁場依存性を求めてグラフにせよ。

3. 固有振動数ωの調和振動子が多数集まった系の、比熱の温度依存性を求め、高温の極限で等分配則が成り立っていることを示せ。

4. ヘルムホルツの自由エネルギーFが秩序変数xに対して、$F(x) = x^4 - ax^2$のようになっており、定数aが温度Tに対して$a(T) = a_0\cdot(T_C - T)$のように振る舞う（T_Cは定数とする）とき、Fの極小値を与えるxの温度依存性を求めよ。但し$a_0 > 0$とする。

5. 三つのエネルギー準位に、三つの同種粒子を置く（右図）。
粒子がそれぞれ、古典粒子、ボース粒子、フェルミ粒子の場合について、可能な配置を全て列挙（図示）し、それぞれの場合の数も記せ。



上　智　大　学　試　験　問　題

1.　二つのエネルギー準位$\varepsilon_1, \varepsilon_2$のエネルギー差が$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$である二準位系のエントロピー$S$, ヘルムホルツの自由エネルギー$F$, 内部エネルギー$E$, 比熱$C$の温度依存性を求め、グラフに描け。但し、横軸は温度$T = -\infty \sim +\infty$とする。

【解答】$F = -k_\mathrm{B}T\log Z = -k_\mathrm{B}T\log\left(2\cosh\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}\right)$, $F \xrightarrow{T\to 0} -k_\mathrm{B}T\log\left(\exp\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}\right) = -\Delta\varepsilon\,/\,2$,

$F \xrightarrow{T\to\infty} -k_\mathrm{B}T\log 2$, $S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_\mathrm{B}\log\left(2\cosh\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}\right) + k_\mathrm{B}T\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T^2}\right)\tanh\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}$,

$S \xrightarrow{T\to 0} k_\mathrm{B}\log e^{\Delta\varepsilon/2k_\mathrm{B}T} - \frac{\Delta\varepsilon}{2T}\cdot 1 = 0$ （$\because F(0)$の傾きもゼロ）, $S \xrightarrow{T\to\infty} k_\mathrm{B}\log 2$,

$E = F + TS = -\frac{\Delta\varepsilon}{2}\tanh\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}$, $E \xrightarrow{T\to 0} -\Delta\varepsilon\,/\,2$, $E \xrightarrow{T\to\infty} 0$,

$C = \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{\Delta\varepsilon}{2\cosh^2\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}}\cdot\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T^2}\right) = \frac{\Delta\varepsilon^2/4k_\mathrm{B}T^2}{\cosh^2\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}}$, $C \xrightarrow{T\to 0} \frac{\Delta\varepsilon^2 e^{-\Delta\varepsilon/2k_\mathrm{B}T}}{16k_\mathrm{B}T^2} \to 0$ （$\because E(0)$の傾きも 0）

$C \xrightarrow{T\to\infty} \frac{\Delta\varepsilon^2}{4k_\mathrm{B}T^2} \propto T^{-2}$, $C'(0) \xrightarrow{T\to 0}$明らかに 0 （$\because C(0)$の傾きも 0）

2.　同じ二準位系において、$\Delta\varepsilon$が磁場Bに比例（$\Delta\varepsilon = B\mu$, 但しμは比例定数）し、各エネルギー準位$\varepsilon_1, \varepsilon_2$の占有数を$n_1, n_2$とするとき、磁化$M = (n_1 - n_2)\cdot\frac{\mu}{2}$と、磁化率$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$の温度依存性及び磁場依存性を求めてグラフにせよ。

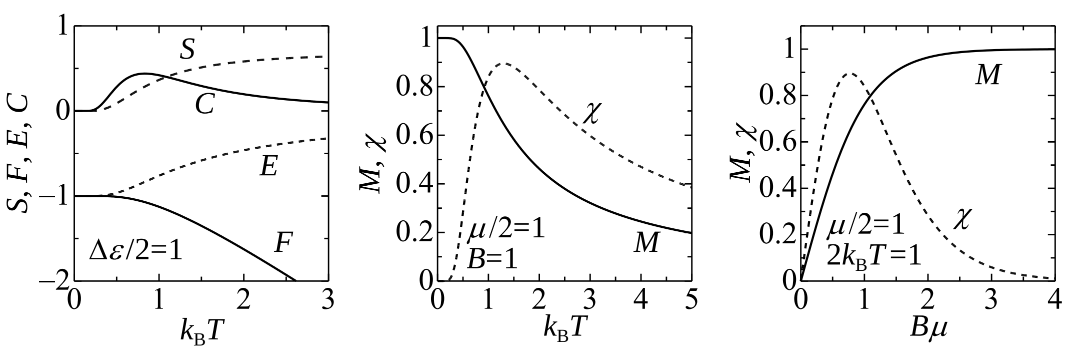
【解答】$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta\varepsilon}{2}, \varepsilon_2 = +\frac{\Delta\varepsilon}{2}$ とすると$n_1 = e^{+\Delta\varepsilon/2k_\mathrm{B}T}/Z$, $n_2 = e^{-\Delta\varepsilon/2k_\mathrm{B}T}/Z$, $Z = 2\cosh\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T}$

よって、$M = (n_1 - n_2)\cdot\frac{\mu}{2} = \mu\tanh\frac{\Delta\varepsilon}{2k_\mathrm{B}T} = \frac{\mu}{2}\tanh\frac{B\mu}{2k_\mathrm{B}T} \to \begin{cases}\mu^2/4k_\mathrm{B}T & (B\to 0,\ T\to\infty)\\ \mu/2 & (B\to\infty,\ T\to 0)\end{cases}$,

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu/2}{\cosh^2\frac{B\mu}{2k_\mathrm{B}T}}\cdot\frac{\mu}{2k_\mathrm{B}T} \to \begin{cases}\mu^2/4k_\mathrm{B}T & (B\to 0,\ T\to\infty)\\ (\mu^2/k_\mathrm{B}T)\cdot e^{-B\mu/k_\mathrm{B}T} & (B\to\infty,\ T\to 0)\end{cases}$$

（別解）$M = -\frac{\partial F}{\partial B} = -\frac{\partial}{\partial B}\left(-k_\mathrm{B}T\log 2\cosh\frac{B\mu}{2k_\mathrm{B}T}\right) = k_\mathrm{B}T\tanh\frac{B\mu}{2k_\mathrm{B}T}\cdot\frac{\mu}{2k_\mathrm{B}T} = \frac{\mu}{2}\tanh\frac{B\mu}{2k_\mathrm{B}T}$

※注）自由スピンの系で、実際に磁化率が減少するのは、強磁場中（$\mu B > k_\mathrm{B}T$ ）のみである。量子スピン反強磁性体で別の理由（量子ゆらぎ）によって、低磁場でも低温で減少する。



上　智　大　学　試　験　問　題

3.　固有振動数ωの調和振動子が多数集まった系の、比熱の温度依存性を求め、高温の極限で等分配則が成り立っていることを示せ。

【解答】$Z=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}=e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\left(1+e^{-\beta\hbar\omega}+\cdots\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}=\frac{1}{2\sinh\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}$

よって、$F=-k_{\mathrm{B}}T\log Z=k_{\mathrm{B}}T\log 2\sinh\frac{1}{2}\beta\hbar\omega$　ここで公式$E=-T^2\left(\frac{F}{T}\right)'$を使うと、

$$E=-k_{\mathrm{B}}T^2\left(\log 2\sinh\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)'=-k_{\mathrm{B}}T^2\left(\frac{\cosh\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}{\sinh\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\right)\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)'=\frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{1}{2}\beta\hbar\omega$$

$$\therefore C=\frac{\partial E}{\partial T}=\frac{\hbar\omega}{2}\frac{-1}{\sinh^2\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T^2}\right)=\frac{k_{\mathrm{B}}}{\sinh^2\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)^2\xrightarrow{T\to\infty}\frac{k_{\mathrm{B}}}{\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)^2}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)^2=k_{\mathrm{B}}$$

これは、運動エネルギー$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}$とポテンシャルエネルギー$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}$への等分配則である。

※調和振動子の個数「N個」を問題にするのであれば、以下のようになる。

$$Z=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}e^{-\beta\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\beta\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\cdots-\beta\left(n_N+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}\right)^N$$

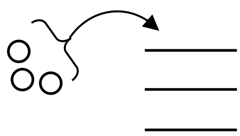
また、三次元であることに着目すれば、$Z=(\ldots)^3$である。

4.　ヘルムホルツの自由エネルギーFが秩序変数xに対して、$F(x)=x^4-ax^2$のようになっており、定数aが温度Tに対して$a(T)=a_0\cdot(T_{\mathrm{C}}-T)$のように振る舞う（$T_{\mathrm{C}}$は定数とする）とき、$F$の極小値を与える$x$の温度依存性を求めよ。

【解答】$\frac{\partial F}{\partial x}(x)=4x^3-2ax=2x\cdot(2x^2-a)=0$より、$a>0$すなわち$T_{\mathrm{C}}>T$では、

$x_{\min}=\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{\frac{a_0}{2}(T_{\mathrm{C}}-T)}$ ，一方、$T_{\mathrm{C}}<T$では$x=0$が極小を与える。

5.　三つのエネルギー準位に、三つの同種粒子を置く（右図）。



粒子がそれぞれ、古典粒子、ボース粒子、フェルミ粒子の場合について、可能な配置を全て列挙（図示）し、それぞれの場合の数も記せ。

【解答】

○○○	―――	―――	○○―	○――	○○―	○――	―――	―――	○――
―――	○○○	―――	○――	○○―	―――	―――	○○―	○――	○――
―――	―――	○○○	―――	―――	○――	○○―	○――	○○―	○――

Bose	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
古典	1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
Fermi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

※「集まりやすさ」は、ボソン＞古典＞フェルミオン　である。

上　智　大　学　試　験　問　題

※当日訂正

・第二問　磁化$M=(n_1-n_2)\cdot\frac{\mu}{2}$（配布プリントは$M=(n_1-n_2)\cdot\mu$　）

・第四問　$a(T)=a_0\cdot(T_{\mathrm{C}}-T)$　配布プリントは符号逆。
さらに、但し、$a_0>0$を明記する