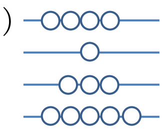
<u>統計力学試験</u>　　　　　　　　　　　　　　　2014年度秋学期1月23日2限9－353室

1．磁場中におかれた$S=½$の局在スピンの系について考えよう。スピンは$S_z=\pm½$ の状態をとるものとし，磁場Bにおけるゼーマンエネルギーが$\varepsilon=g\mu_{\mathrm{B}}S_zB$で与えられるとしたときの磁化$M=g\mu_{\mathrm{B}}\langle S_z\rangle$ を求め，磁場依存性と温度依存性をそれぞれグラフにせよ。gとμ_{B}は定数である。

ヒント: $F=-k_{\mathrm{B}}T\log Z=E-TS-MB$を使うととても簡単。

2．$E=0,k_{\mathrm{B}},2k_{\mathrm{B}},3k_{\mathrm{B}}$である，四準位系の占有数を，$T=-\infty,-1,-\delta,+\delta,+1,+\infty$ の6つのケースについて概略を図示せよ。ここでδは正の微小量であり，また，全粒子数は十数個程度とする。

例）

次に，エントロピーとエネルギーが最大・最小なのは、上記のTについてどの場合か説明せよ。

3．秩序変数Δに対し，自由エネルギーが$F(\Delta)=(T-T_{\mathrm{C}})\cdot\Delta^2+\Delta^4$と与えられるとする。ここで、$T_{\mathrm{C}}$は正の定数である。$F$の最小値を与える$\Delta$の温度依存性を求め，横軸を 0～$2T_{\mathrm{C}}$の範囲でグラフにせよ。もし$\Delta$の値が複数個ある場合は，それがどうして一つに決まるか説明せよ。

次に，$T>T_{\mathrm{C}}$において，Δを座標変数とみなした場合にもしΔが非常に小さい場合は，Fは，質量m，固有振動数ω_0の調和振動子のポテンシャルエネルギーと見なせる。ω_0の温度依存性を求め，グラフにせよ。

ヒント: 調和振動子のポテンシャルエネルギーと比較すればすぐにわかる。

4．理想気体の状態方程式を求めよ。

5．量子統計が必要になる場合はどのような場合か、簡潔に説明せよ。

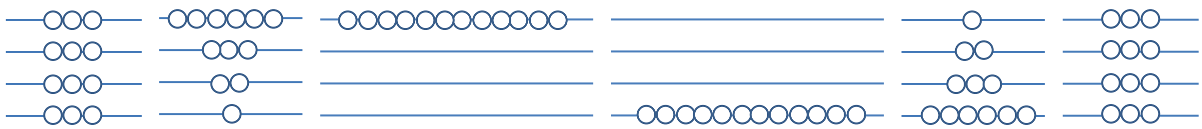
6．感想をどうぞ

第一問）$F = -k_{\mathrm{B}}T\log\left(e^{-\beta g\mu_{\mathrm{B}}B/2} + e^{+\beta g\mu_{\mathrm{B}}B/2}\right)$ より，

$M = -\partial F/\partial B = \frac{\partial}{\partial B}k_{\mathrm{B}}T\log\cosh\frac{\beta g\mu_{\mathrm{B}}B}{2} = \frac{k_{\mathrm{B}}T\beta g\mu_{\mathrm{B}}}{2}\cdot\frac{\sinh\beta g\mu_{\mathrm{B}}B/2}{\cosh\beta g\mu_{\mathrm{B}}B/2} = \frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{2}\cdot\tanh\frac{g\mu_{\mathrm{B}}B}{2k_{\mathrm{B}}T}$

$\frac{B}{T}\to 0$で，$M \simeq (g/2)\mu_{\mathrm{B}}\frac{(g/2)\mu_{\mathrm{B}}B}{k_{\mathrm{B}}T} \simeq \mu_{\mathrm{B}}\cdot\frac{\mu_{\mathrm{B}}B}{k_{\mathrm{B}}T}$ ，一方，$\frac{B}{T}\to\infty$で，$M \simeq \frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{2} \simeq \mu_{\mathrm{B}}$

第二問）$T = -\infty,\ -1,\ -\delta,\ +\delta,\ +1,\ +\infty$ の各場合の占有数概略は下図の通り。



Sが最大なのは$T = \pm\infty$（ばらけた方が場合の数が多い），最小なのは$T = \pm\delta$ である。Eが最大なのは、$T = -\delta$，最小は$T = +\delta$となる。注）$T = \pm\infty$の状態は見分けがつかない。

第三問）

$\frac{\partial F}{\partial\Delta} = 2(T - T_{\mathrm{C}})\cdot\Delta + 4\Delta^3 = 0$より，$\Delta = 0, \pm\sqrt{\frac{T-T_{\mathrm{C}}}{2}}$で$F$は極値を取る。このうち最小値を与えるものは、$T > T_{\mathrm{C}}$では 0 であり，一方，$T < T_{\mathrm{C}}$では，$\pm\sqrt{\frac{T-T_{\mathrm{C}}}{2}}$である。複号は自発的対称性の破れによって決まる。

Δが小さい場合，$F(\Delta) \simeq (T - T_{\mathrm{C}})\cdot\Delta^2$ と近似出来るので，これを調和振動のポテンシャル$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$と係数を比較すると，$\frac{1}{2}m\omega_0^2 = T - T_{\mathrm{C}}$ であるので，$\omega_0 = \sqrt{\frac{2(T-T_{\mathrm{C}})}{m}}$となる。

第四問）

$Z = \frac{1}{N!h^{3N}}\int d^N\vec{r}d^N\vec{p}\ e^{-\beta E} = \frac{V^N}{N!h^{3N}}\left(\int dp\ e^{-\beta p^2/2m}\right)^{3N} = \frac{V^N}{N!h^{3N}}\sqrt{2m\pi/\beta}^{3N} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2m\pi}{h^2\beta}\right)^{3N/2}$

$\log Z \simeq N\log V - (N\log N - N) + \frac{3N}{2}\log\frac{2m\pi k_{\mathrm{B}}T}{h^2} = N\log\frac{V}{N} + N + \frac{3N}{2}\log\frac{2m\pi k_{\mathrm{B}}T}{h^2}$

$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V}(-k_BT\log Z) = \frac{\partial}{\partial V}\left(k_BTN\log\frac{V}{N} + \cdots\right) = \frac{Nk_BT}{V}$

注）その他の性質も、$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$，$E = F + T\frac{\partial F}{\partial T}$，$C = \frac{\partial E}{\partial T}$ などから。

第五問）

低温で同種粒子が触れ合う確率が高くなる場合に量子統計が必要になる。 ※具体的には不確定性原理（波束を形成する平面波のエネルギーは $0 \sim k_{\mathrm{B}}T$）から求めた波束サイズ$\delta x \simeq h/\delta p \simeq h/\sqrt{2mk_{\mathrm{B}}T}$ が粒子間隔（$a \simeq n^{-1/3}$）と一致する（$\delta x \simeq a$）温度以下。詳しくは量子統計（大槻先生）で。