この問題用紙は持ち帰ること、【重要】途中の計算を書いていない答案は採点しない

問１．磁場中におかれた$S=½$の局在スピンの系について考えよう。スピンは$S_z=\pm½$ の状態をとるものとし，磁場Bにおけるゼーマンエネルギーが $\varepsilon=g\mu_{\mathrm{B}}S_zB$ で与えられるとしたとき、内部エネルギーEと自由エネルギーFを求め、$T=0\sim+\infty$での温度依存性をグラフにせよ。ここで$B>0$であり、また、gとμ_{B}は定数である。

問２．粒子のエネルギーが、$\varepsilon=\hbar\omega(n+½)$と与えられる（$n=0,1,2\ldots$）とき分配関数$Z$を求めよ。さらに自由エネルギー$F$とエントロピー$S$を求め、内部エネルギー$E=F+TS$を求め、$E$を温度で微分して比熱$C$を求め、$C$が低温と高温の極限でどのような振る舞いをするか調べよ。

問３．相互作用するスピン集団のエネルギーが$E=\sum_{\langle i,j\rangle}-J\,S_{jz}S_{iz}$ と与えられるとする。ここで変数S_{iz}を平均値$\langle S_{iz}\rangle$と近似と、エネルギーは$E=\sum_i\ -g\mu_{\mathrm{B}}B_{\mathrm{eff}}S_{iz}$ と書ける。

但し、$S_{iz}=\pm½$であり、$\langle i,j\rangle$ は相互作用するペア、J は相互作用の強さを表す正の定数とし、また、スピンS_{iz}の周囲に居てS_{iz}と相互作用するスピンの個数をzする。

イ）$g\mu_{\mathrm{B}}B_{\mathrm{eff}}=J\langle S_{iz}\rangle z$ を簡潔に示せ

ロ）一粒子の分配関数Zを求めよ

ハ）Zを規格化に使って$\langle S_{iz}\rangle$を求める式を導出せよ

ニ）前の（ハ）の式が $\langle S_{iz}\rangle\neq 0$の解を持つ条件を求めよ

問４．異なる三つのエネルギー準位に二つの粒子を詰めることを考えよう。古典粒子、ボソン、フェルミオンについて、可能な配置と場合の数を図示せよ（表でも可)。　注意）粒子数は３ではなく２である。粒子のスピンは考えない。

自己責任で使用$\beta=\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$　$\frac{\partial\beta}{\partial T}=\frac{-1}{k_{\mathrm{B}}T^2}$　$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$　$\sinh(x\simeq0)\simeq x$　$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　$\cosh(x\to\infty)\simeq½e^x$

$\cosh(x\simeq0)\simeq1+½x^2$　$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　$\tanh(x\simeq0)\simeq x$　$\tanh(x\to\infty)\simeq1-2e^{-2x}$　$\frac{\partial}{\partial T}e^{\hbar\omega\beta}=-\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T^2}e^{\hbar\omega\beta}$

$\tanh' x=\frac{1}{\cosh^2 x}$　$\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{e^{\hbar\omega\beta}-1}=\frac{e^{\hbar\omega\beta}}{\left(e^{\hbar\omega\beta}-1\right)^2}\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T^2}$　$\frac{\partial}{\partial T}\log\left(1-e^{-\hbar\omega\beta}\right)=\frac{-e^{-\hbar\omega\beta}}{1-e^{-\hbar\omega\beta}}\cdot\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T^2}$　$1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z}$

問１．　磁場中におかれた$S=½$の局在スピンの系について考えよう。スピンは$S_z=\pm½$ の状態をとるものとし，磁場Bにおけるゼーマンエネルギーが $\varepsilon=g\mu_\mathrm{B}S_zB$ で与えられるとしたとき、内部エネルギーEと自由エネルギーFを求め､$T=0\sim+\infty$での温度依存性をグラフにせよ。ここで$B>0$であり、また、 gとμ_Bは定数である。

$F=-k_\mathrm{B}T\log Z=-k_\mathrm{B}T\log(2\cosh ½g\mu_\mathrm{B}B\beta)$　　注）$O(\dots)$ は微小量のオーダーを表す

$F(T\simeq 0)\simeq -k_\mathrm{B}T\log\left(e^{½g\mu_\mathrm{B}B\beta}\right)=-k_\mathrm{B}T(½g\mu_\mathrm{B}B\beta)=-½g\mu_\mathrm{B}B-O\left(e^{-g\mu_\mathrm{B}B\beta}\right)$

$F(T\simeq\infty)\simeq -k_\mathrm{B}T\log\left(2\cdot(1+(½g\mu_\mathrm{B}B\beta)^2)\right)\simeq -k_\mathrm{B}T(\log 2+O(T^{-2}))$

$E=-½g\mu_\mathrm{B}B\tanh(½g\mu_\mathrm{B}B\beta)$

$E(T\simeq 0)\simeq -½g\mu_\mathrm{B}B+O\left(e^{-g\mu_\mathrm{B}B\beta}\right),\ E(T\simeq\infty)\simeq -(½g\mu_\mathrm{B}B)^2\beta\propto 1/T$

問２．　粒子のエネルギーが、$\varepsilon=\hbar\omega(n+½)$と与えられるとき分配関数$Z$を求めよ。さらに、自由エネルギー$F$とエントロピー$S$を求め、内部エネルギー$E=F+TS$を求め、$E$を温度で微分することで比熱$C$を求め、$C$が低温と高温の極限でどのような振る舞いをするか調べよ。

$F=-k_\mathrm{B}T\log Z=-k_\mathrm{B}T\log\left(e^{-\hbar\omega(½)\beta}+e^{-\hbar\omega(1+½)\beta}+\cdots\right)=-k_\mathrm{B}T\log\left(e^{-½\hbar\omega\beta}\cdot\left(1+e^{-\hbar\omega\beta}+e^{-2\hbar\omega\beta}+\cdots\right)\right)=-k_\mathrm{B}T\left(-\frac{\hbar\omega\beta}{2}+\log\left(\frac{1}{1-e^{-\hbar\omega\beta}}\right)\right)=\frac{\hbar\omega}{2}+k_\mathrm{B}T\log\left(1-e^{-\hbar\omega\beta}\right)$

$S=-\frac{\partial F}{\partial T}=-k_\mathrm{B}\log\left(1-e^{-\hbar\omega\beta}\right)-\frac{-k_\mathrm{B}Te^{-\hbar\omega\beta}}{1-e^{-\hbar\omega\beta}}\cdot\left(-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}(-T^2)}\right)$より、$E=F+TS=\frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{\hbar\omega\beta}{2}$, よって、

$C=\frac{\partial E}{\partial T}=\frac{1}{4\sinh^2½\hbar\omega\beta}\frac{(\hbar\omega)^2}{k_\mathrm{B}T^2}$，低温（$\beta\simeq\infty$）では$C(T\simeq 0)\simeq e^{-\hbar\omega\beta}\frac{(\hbar\omega)^2}{k_\mathrm{B}T^2}\to 0$（$E_\mathrm{gap}=\hbar\omega$）

高温では、$C(T\simeq\infty)=\frac{1}{4\cdot(½\hbar\omega\beta)^2}\frac{(\hbar\omega)^2}{k_\mathrm{B}T^2}=k_\mathrm{B}$（バネと運動エネルギーの等分配則）

問３．　相互作用するスピン集団のエネルギーが$E=\sum_{\langle i,j\rangle}-J\,S_{jz}S_{iz}$ と与えられるとする。ここで変数S_{iz}を平均値$\langle S_{iz}\rangle$と近似と、エネルギーは$E=\sum_i -g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}S_{iz}$ と書ける。但し$S_{iz}=\pm½$で、$\langle i,j\rangle$ は相互作用するペア、J は相互作用の強さを表す正の定数として、スピンS_{iz}の周囲に居てS_{iz}と相互作用するスピンの個数をzする。

イ）$g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}=J\langle S_{iz}\rangle z$ を簡潔に示せ　　ロ）一粒子の分配関数Zを求めよ。　　ハ）Zを規格化に使って$\langle S_{iz}\rangle$を求める式を導出せよ　　ニ）前の (ハ) の式が $\langle S_{iz}\rangle\neq 0$の解を持つ条件を求めよ。

$E\simeq\sum_i -Jz\langle S_{iz}\rangle S_{iz}=\sum_i -g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}S_{iz}$ ， $Z=e^{-(-½)g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}\beta}+e^{-½g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}\beta}$,

$\langle S_{iz}\rangle=\frac{½\cdot e^{½g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}\beta}-½e^{-½g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}\beta}}{Z}=½\tanh(½g\mu_\mathrm{B}B_\mathrm{eff}\beta)$　　この式を$\langle S_{iz}\rangle$が変数であるとして解く。$\langle S_{iz}\rangle\neq 0$の解が存在するためには右辺の原点での勾配が１以上であるから、右辺の変数を戻せば、$=½\tanh(½J\langle S_{iz}\rangle z\beta)$となるので、$\frac{\partial}{\partial\langle S_{iz}\rangle}½\tanh(½J\langle S_{iz}\rangle z\beta)=\left.\frac{¼Jz\beta}{\cosh^2(½J\langle S_{iz}\rangle z\beta)}\right|_{\langle S_{iz}\rangle=0}=\frac{¼Jz}{k_\mathrm{B}T}>1$

が、スピンが自発的に揃う条件と言うことになる。

問４．　異なる三つのエネルギー準位に二つの粒子を詰めることを考えよう。古典粒子、ボソン、フェルミオンについて、可能な配置と場合の数を図示せよ（表でも可）。　注意）粒子数は３ではなく２。粒子のスピンは考えなくても良い。

準位						
第一準位の粒子数	0	0	2	0	1	1
第二準位の粒子数	0	2	0	1	1	0
第三準位の粒子数	2	0	0	1	0	1
古典粒子の場合の数	1	1	1	2	2	2
ボース粒子の場合の数	1	1	1	1	1	1
フェルミ粒子の場合の数	0	0	0	1	1	1

自己責任で使用$\beta=\frac{1}{k_\mathrm{B}T}$　$\frac{\partial\beta}{\partial T}=\frac{-1}{k_\mathrm{B}T^2}$　$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$　$\sinh(x\simeq 0)\simeq x$　$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　$\cosh(x\to\infty)\simeq ½e^x$

$\cosh(x\simeq 0)\simeq 1+½x^2$　$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　$\tanh(x\simeq 0)\simeq x$　$\tanh(x\to\infty)\simeq 1-2e^{-2x}$　$\frac{\partial}{\partial T}e^{\hbar\omega\beta}=-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T^2}e^{\hbar\omega\beta}$

$\tanh' x=\frac{1}{\cosh^2 x}$　$\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{e^{\hbar\omega\beta}-1}=\frac{e^{\hbar\omega\beta}}{\left(e^{\hbar\omega\beta}-1\right)^2}\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T^2}$　$\frac{\partial}{\partial T}\log\left(1-e^{-\hbar\omega\beta}\right)=\frac{-e^{-\hbar\omega\beta}}{1-e^{-\hbar\omega\beta}}\cdot\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T^2}$　$1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z}$