$\boxed{\text{注意}}$これは講義ノートではありません。計算の要点を抜粋しただけのものです。

１０-A 波の状態密度

三次元の箱に閉じ込められた波を考える。境界条件は、両端節とすると振幅は、

$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\sin\vec{k}\cdot\vec{r}\cdot\sin\omega t$　　　但し、$k_\alpha=\dfrac{\pi}{L}n_\alpha\quad(\alpha=x,y,z;\ n_a=1,2,3\cdots)$

$$\therefore\varepsilon=c\hbar k=c\hbar\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}=c\hbar\frac{\pi}{L}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$$

ε より小さなエネルギーの状態数は、$\varepsilon>c\hbar\dfrac{\pi}{L}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$ を満たす (n_x,n_y,n_z) の数

この不等式が球を表すことと、$\vec{n}$ の成分は全て正であることから、

$$\mathrm{N}(\varepsilon)=(\text{モード数})\cdot\underbrace{\frac{1}{8}}_{\frac{1}{8}\text{球}}\cdot\frac{4\pi}{3}\underbrace{\left(\frac{L\varepsilon}{c\hbar\pi}\right)}_{|\vec{n}|}^3=(\text{モード数})\cdot\frac{\pi}{6}\left(\frac{L\varepsilon}{c\hbar\pi}\right)^3,\quad D(\varepsilon)=\frac{\partial\,\mathrm{N}}{\partial\varepsilon}$$

１０-B モード数

同じ (n_x,n_y,n_z) に縮退している状態の数のこと。

スピン縮退＝$2S+1$　(質量ゼロの粒子を除く)

光子＝横波（水平偏波・垂直偏波）の二つ ⇐日本のテレビ電波は水平偏波

格子振動＝縦波と横波（水平偏波・垂直偏波）の三つ

１０-C 光子集団のエネルギー分布

箱に閉じ込められた光子(溶鉱炉など)の振動数の分布

まずモード数は、2 つなので $D(\varepsilon)=\pi\left(\dfrac{L}{c\hbar\pi}\right)^3\varepsilon^2=\dfrac{\pi V}{(c\hbar\pi)^3}\varepsilon^2$

$$\langle E\rangle=\int_0^\infty\frac{D(\varepsilon)\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon=A\int_0^\infty\frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon=\int_0^\infty\frac{8\pi V}{(ch)^3}\frac{(h\nu)^3}{e^{\beta h\nu}-1}d(h\nu)=\int_0^\infty\overbrace{\frac{8\pi V}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}}^{\text{プランクの熱輻射式}\equiv u(\nu,T)}d\nu$$

$u(\nu,T)$ のグラフを右図に示す

山の頂上の位置を求めるために微分すると、$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\propto3\nu^2\left(e^{\beta h\nu}-1\right)-\nu^3\beta he^{\beta h\nu}=0$　となり、

$1-e^{-\beta h\nu}=\dfrac{\beta h\nu}{3}$ という超越方程式になる。

(指数関数や三角関数などを含んだ方程式)

これでは、解の個数さえわからない。

そこで、$x=\beta h\nu$ と置くと、

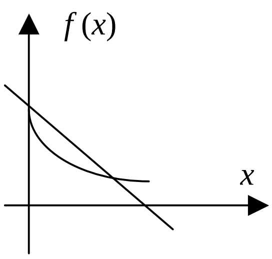
$1-\dfrac{x}{3}=e^{-x}$ となるので、

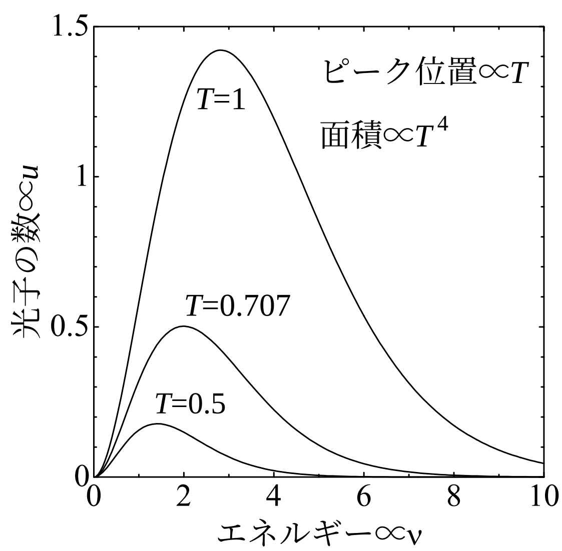
グラフにすると、

$x=$ 約 2.82 とわかる。

$\therefore\beta h\nu=\dfrac{h\nu}{k_{\mathrm{B}}T}=2.82\cdots$

「ウィーンの偏移則」





１０-D なぜ、緑の星はないのか。

温度を上げると、最も多い光子の振動数は、赤、橙、黄、緑、青、藍、紫、と増えて行くはず。しかし、現実には緑の星は無い。⇒ いろいろな光が混ざると白色

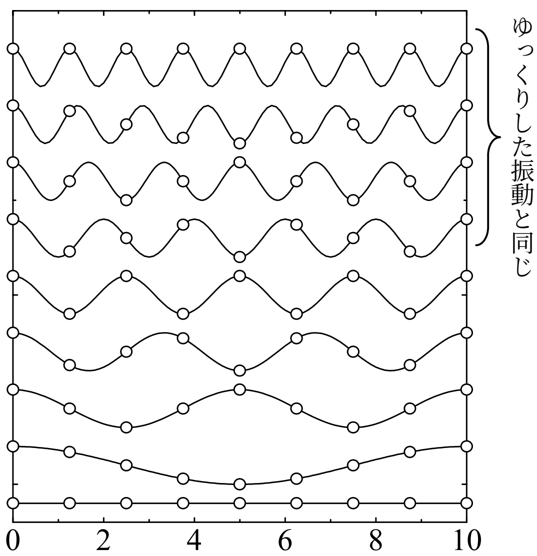
１０-E 光子集団の全エネルギー

$$\langle E\rangle = \int_0^\infty \frac{8\pi V}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty \frac{h\nu^3 e^{-\beta h\nu}}{1-e^{-\beta h\nu}}d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty h\nu^3 e^{-\beta h\nu}\left(1+e^{-\beta h\nu}+e^{-2\beta h\nu}\cdots\right)d\nu$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty h\nu^3\left(e^{-\beta h\nu}+e^{-2\beta h\nu}+\cdots\right)$$

ステファンボルツマンの法則$= \dfrac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15c^3h^3}$　：意味＝温度を上げると光子のエネルギーも上がる(青が増える)し、光子数も増えるので、全エネルギーは、温度の 4 乗となる。

１０-F 固体の格子振動



固体の中には多くの「粒子もどき」が居る。その中の一つが格子振動(フォノン)。これをボース粒子と考えると、統計力学で簡単に扱える。

格子振動には、最大波数（最小波長）が存在する。飛び飛びに存在している格子点を振動させると、細かい振動は、振動していないのと同じになってしまう(右図)。よって、エネルギーを求める積分を行う際に、積分範囲が∞でなく、上限が付く。⇔ 光子は、「真空の場」の振動であり、いくらでも細かく振動できるのでそういうことはない。

１０-G デバイ近似(Debye)

1) 波の速さを一定とする $\omega = ck$

　　⇔ 実際は振動数によって異なる。一次元鎖では $\omega \propto \sin ka$

2) 最大波数を全自由度(＝粒子数×モード数)から決定する： $\int_0^{\varepsilon_D} D(\varepsilon)d\varepsilon = 3N$

　　一つの粒子の自由度は、xyz の各方向に振動できるので 3 つである。

$D(\varepsilon) = \dfrac{\pi V}{2}\left(\dfrac{3}{c^3}\right)\dfrac{\varepsilon^2}{\hbar^3\pi^3}$　より、 $\dfrac{3\pi V}{2c^3}\dfrac{\varepsilon_D^3/3}{\hbar^3\pi^3} = 3N$　但し、$\varepsilon_D \equiv$デバイエネルギー

これから、デバイ振動数 $\omega_D = \varepsilon_D/\hbar$、デバイ波数 $k_D = \omega_D/c$ などが求まる。

１０-H デバイ近似による固体の比熱

$$C = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\int_0^{\varepsilon_D}\frac{D(\varepsilon)\varepsilon}{e^{\beta h\nu}-1}d\varepsilon = \frac{\partial}{\partial T}\int_0^{\varepsilon_D}\frac{A\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$

$T \to 0$ では、$C \approx \dfrac{\partial}{\partial T}\displaystyle\int_0^{\varepsilon_D} A\varepsilon^3 e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon = \dfrac{\partial}{\partial T}T^4\int_0^{x_D} Ax^3e^{-x}dx$　但し、$x_D = \beta\varepsilon_D$

なので、積分範囲を∞にしてよくて、$C \approx T^3 \times const.$　―Debye 比熱

金属の比熱＝$\underset{\gamma T}{\overset{\text{フェルミオン}}{\text{自由電子の比熱}}}$＋$\underset{aT^3}{\overset{\text{フォトン(ボソン)}}{\text{格子振動の比熱}}}$ ＋ $\overset{\text{マグノン(ボソン)}}{\text{スピンの比熱}}$ ＋・・・・・