

**注意** これは講義ノートではありません。計算の要点を抜粋しただけのものです。

### 9-A 調和振動子の状態密度

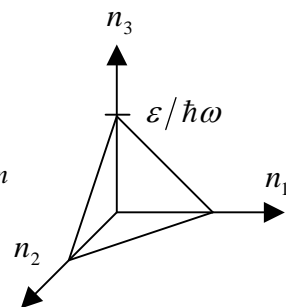
調和ポテンシャルに閉じ込められた粒子  $\varepsilon = \hbar\omega (n_x + n_y + n_z)$

(但し、エネルギーの原点を零点エネルギーが零になるようずらした)

c.f. 箱型ポテンシャルに閉じ込められた粒子では  $\varepsilon = \hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) / 2m$

エネルギーが  $0 \sim \varepsilon$  の状態数は右図より、 $N(\varepsilon) = V_{\text{pyramid}} = \frac{1}{6} (\varepsilon / \hbar\omega)^3$

$$D(\varepsilon) \approx \partial N / \partial \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^2 / (\hbar\omega)^3$$



### 9-B 調和ポテンシャル中のボース粒子

粒子数の式は、

$$N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f_B(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon - \beta\mu} - 1} = \frac{1}{2(\beta\hbar\omega)^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x - \beta\mu} - 1}$$

$$X \equiv e^{-x + \beta\mu} \text{ とおくと } |X| < 1 \text{ なので、} = \frac{1}{2(\beta\hbar\omega)^3} \int_0^\infty x^2 dx (X + X^2 + X^3 + \dots)$$

$$\text{これを二回部分積分すれば、} = -\frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} \left( -\frac{e^{\beta\mu}}{1^3} - \frac{e^{2\beta\mu}}{2^3} - \frac{e^{3\beta\mu}}{3^3} \dots \right)$$

低温にして行き、限界点  $\mu = 0$  で右辺が最大限大きくなった時は  $N = \zeta(3) / (\beta_c \hbar\omega)^3$

これ以下の温度(上式を  $\beta_c$  について解いた温度)で、ボースアインシュタイン凝縮が起こる。

「磁場勾配による調和ポテンシャルに閉じ込められたアルカリ原子のレーザー冷却」

前回 No.8 の三次元の箱の中のボース粒子は、「液体ヘリウムの凝縮」である。

### 9-C 二次元の板に閉じ込められたボース粒子

$$\text{状態密度は、} \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} = \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2} = \frac{k}{2\pi} \left( \frac{dk}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon = \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{1}{\hbar^2 k/m} \cdot d\varepsilon = \frac{m}{2\pi \hbar^2} d\varepsilon$$

$$\text{より、} D(\varepsilon) d\varepsilon = S \cdot A d\varepsilon \quad \text{但し、} A = \frac{m}{2\pi \hbar^2}, S = \text{板の面積}$$

これを使うと、

$$N = A \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon - \beta\mu} - 1} = \frac{A}{\beta} \int_0^\infty \frac{d(\beta\varepsilon)}{e^{\beta\varepsilon - \beta\mu} - 1} = \frac{A}{\beta} \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x - \beta\mu} - 1} = \frac{A}{\beta} \int_0^\infty dx (X + X^2 + X^3 + \dots)$$

$$= -\frac{2A}{\beta^3} \left( -\frac{e^{\beta\mu}}{1} - \frac{e^{2\beta\mu}}{2} - \frac{e^{3\beta\mu}}{3} \dots \right)$$

となるが、右辺は低温でも、 $\mu \rightarrow 0$  とするといくらでも大きくなる。

よって、ボースアインシュタイン凝縮は起こらない。

注) 実際、 $\mu = 0$  とすると右辺は、

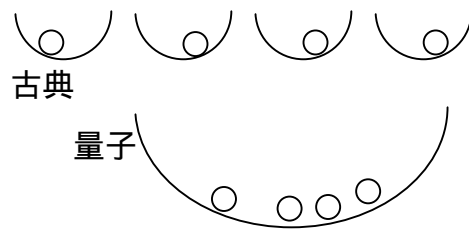
$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \text{発散}$$

9-D 古典的調和振動子との比較 [復習]

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = e^{-\beta \hbar \omega / 2} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right) = \frac{1}{2 \sinh(\beta \hbar \omega / 2)}$$



$$F = -k_B T \log Z = k_B T (\log 2 \sinh(\beta \hbar \omega / 2))$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -k_B \log 2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{2T} \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}$$

$$E = F + TS, \quad C = \partial E / \partial T, \text{ etc.}$$

\* 粒子がお互いに触れ合うかどうか、古典統計か、量子統計かのわかれめ。

9-E 光子の状態密度

[準備] 光子(電磁波)の性質:  $S=1, m=0, d\omega/dk=c (\because \omega=ck), \mu=0$

一辺  $L$  の金属箱(空洞、導波管、“溶鉱炉”)の中に定在波が立っているとす。

(箱の表面は「節」、つまり表面では電場 = 0) すると、

電場は、 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin \vec{k} \cdot \vec{r} \cdot \sin \omega t$  となる。 但し、 $k_\alpha = \frac{\pi}{L} n_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z; n_\alpha = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\varepsilon = \hbar \omega = \hbar c k = \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \hbar c \frac{\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$\varepsilon$  より小さなエネルギーの状態数は、 $\varepsilon > \hbar c \frac{\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$  を満たす  $(n_x, n_y, n_z)$  の数で、

$$N(\varepsilon) = \underbrace{2}_{\substack{\text{偏波} \\ \text{方向}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{\substack{\text{1球}}} \cdot \frac{4\pi}{3} \left( \frac{L\varepsilon}{\hbar c \pi} \right)^3 = \frac{\pi}{3} \left( \frac{L\varepsilon}{\hbar c \pi} \right)^3 \quad \text{となる。}$$

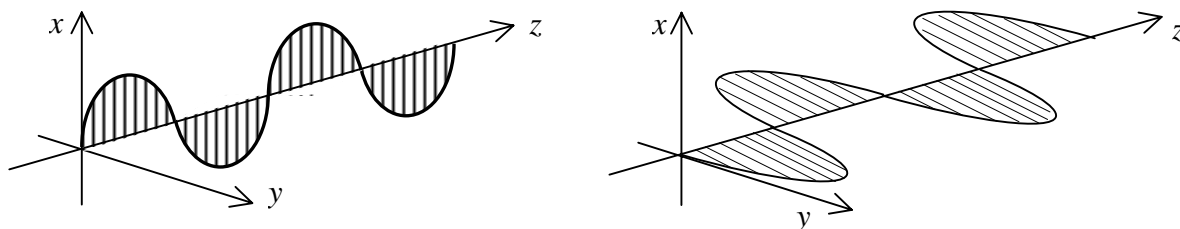
9-F 光子の偏波モード数による縮退 (上式のトップの2の意味)

前項で、同じ  $(n_x, n_y, n_z)$  であっても、振動電場ベクトルの方向で二重に縮退している。

独立な電場  $\vec{E}_0$  の方向は、進行方向  $\vec{k}$  に対して直交する二つ 二つの自由度

$$D(\varepsilon) = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \pi \left( \frac{L}{\hbar c \pi} \right)^3 \varepsilon^2 \quad \text{単位エネルギー幅あたりの状態密度}$$

注) 光子をスピンを持った粒子と見ると、偏波方向による自由度は、スピン自由度に対応している。 $S=1$  なので、本来、自由度は3であるはずなのであるが、 $m=0$  なので、質量の粗密波である縦波が存在せず、自由度2となる。たとえば、 $(0,0,1)$  の波は下図の二つある。



9-G 単位振動数幅あたりの状態密度

光は振動数で扱うことが多いので、状態密度も「単位周波数幅」あたりで言うと、

$$D(\nu) d\nu = \frac{\partial N(\nu)}{\partial \nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \nu^2 d\nu \quad \text{となる。}$$

同じ関数名  $D$  を使って書くことが多いので、常に引数の型や、説明文に注意すること。

10-A 波の状態密度

三次元の箱に閉じ込められた波を考える。境界条件は、両端節とすると振幅は、

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin \vec{k} \cdot \vec{r} \cdot \sin \omega t \quad \text{但し、} k_\alpha = \frac{\pi}{L} n_\alpha \quad (\alpha = x, y, z; n_\alpha = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\varepsilon = \hbar k = \hbar \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \hbar \frac{\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$\varepsilon$  より小さなエネルギーの状態数は、 $\varepsilon > \hbar \frac{\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$  を満たす  $(n_x, n_y, n_z)$  の数  
この不等式が球を表すことと、 $\vec{n}$  の成分は全て正であることから、

$$N(\varepsilon) = (\text{モード数}) \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{\frac{1}{8}\text{球}} \cdot \underbrace{\frac{4\pi}{3} \left( \frac{L\varepsilon}{\hbar\pi} \right)^3}_{|\vec{n}|} = (\text{モード数}) \cdot \frac{\pi}{6} \left( \frac{L\varepsilon}{\hbar\pi} \right)^3, \quad D(\varepsilon) = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon}$$

10-B モード数

同じ  $(n_x, n_y, n_z)$  に縮退している状態の数のこと。

スピン縮退 =  $2S+1$  (質量ゼロの粒子を除く)

光子 = 横波 (水平偏波・垂直偏波) の二つ ←日本のテレビ電波は水平偏波

格子振動 = 縦波と横波 (水平偏波・垂直偏波) の三つ

10-C 光子集団のエネルギー分布

箱に閉じ込められた光子(溶鉱炉など)の振動数の分布

まずモード数は、2つなので  $D(\varepsilon) = \pi \left( \frac{L}{\hbar\pi} \right)^3 \varepsilon^2 = \frac{\pi V}{(\hbar\pi)^3} \varepsilon^2$

プランクの熱放射式  $= u(\nu, T)$

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \frac{D(\varepsilon)\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{8\pi V}{(ch)^3} \frac{(h\nu)^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d(h\nu) = \int_0^\infty \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

$u(\nu, T)$  のグラフを右図に示す

山の頂上の位置を求めるために微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial \nu} \propto 3\nu^2 (e^{\beta h\nu} - 1) - \nu^3 \beta h e^{\beta h\nu} = 0$  となり、

$1 - e^{-\beta h\nu} = \frac{\beta h\nu}{3}$  という超越方程式になる。

(指数関数や三角関数などを含んだ方程式)

これでは、解の個数さえわからない。

そこで、 $x = \beta h\nu$  と置くと、

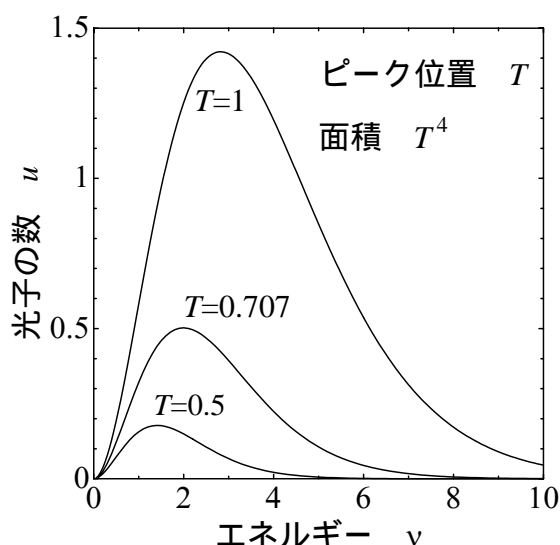
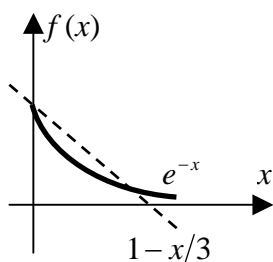
$1 - \frac{x}{3} = e^{-x}$  となるので、

グラフにすると、

$x = \text{約} 2.82$  とわかる。

$$\therefore \beta h\nu = \frac{h\nu}{k_B T} = 2.82 \dots$$

「ウィーンの変位則」



10-D なぜ、緑の星はないのか。

温度を上げると、最も多い光子の振動数は、赤、橙、黄、緑、青、藍、紫、と増えて行くはず。しかし、現実には緑の星は無い。いろいろな光が混ざると白色

10-E 光子集団の全エネルギー

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty h\nu^3 e^{-\beta h\nu} (1 + e^{-\beta h\nu} + e^{-2\beta h\nu} \dots) d\nu$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty h\nu^3 (e^{-\beta h\nu} + e^{-2\beta h\nu} + \dots)$$

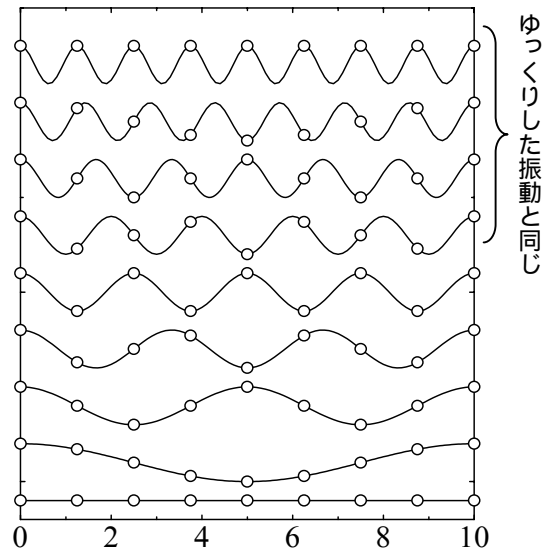
ステファンボルツマンの法則  $= \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15c^3 h^3}$  : 意味 = 温度を上げると光子のエネルギーも上がる(青が増える)し、光子数も増えるので、全エネルギーは、温度の4乗となる。

10-F 固体の格子振動

固体の中には多くの「粒子もどき」が居る。その中の一つが格子振動(フォノン)。これをボース粒子と考えると、統計力学で簡単に扱える。

格子振動には、最大波数(最小波長)が存在する。飛び飛びに存在している格子点を振動させると、細かい振動は、振動していないのと同じになってしまう(右図)。よって、エネルギーを求める積分を行う際に、積分範囲がでなく、上限が付く。

光子は、「真空の場」の振動であり、いくらでも細かく振動できるのでそういうことはない。



10-G デバイ近似(Debye)

1) 波の速さを一定とする  $\omega = ck$

実際は振動数によって異なる。一次元鎖では  $\omega \propto \sin ka$

2) 最大波数を全自由度(= 粒子数 × モード数)から決定する:  $\int_0^{\epsilon_D} D(\epsilon) d\epsilon = 3N$

一つの粒子の自由度は、xyz の各方向に振動できるので3つである。

$$D(\epsilon) = \frac{\pi V}{2} \left( \frac{3}{c^3} \right) \frac{\epsilon^2}{h^3 \pi^3} \text{ より、 } \frac{3\pi V}{2c^3} \frac{\epsilon_D^3}{h^3 \pi^3} = 3N \text{ 但し、 } \epsilon_D \equiv \text{ デバイエネルギー}$$

これから、デバイ振動数  $\omega_D = \epsilon_D / \hbar$ 、デバイ波数  $k_D = \omega_D / c$  などが求まる。

10-H デバイ近似による固体の比熱

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\epsilon_D} \frac{D(\epsilon) \epsilon}{e^{\beta h\epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\epsilon_D} \frac{A \epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta \epsilon} - 1}$$

$$T \rightarrow 0 \text{ では、 } C \approx \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\epsilon_D} A \epsilon^3 e^{-\beta \epsilon} d\epsilon = \frac{\partial}{\partial T} T^4 \int_0^{x_D} A x^3 e^{-x} dx \text{ 但し、 } x_D = \beta \epsilon_D$$

なので、積分範囲を にしてよくて、  $C \approx T^3 \times const.$  Debye 比熱

フェルミオン	フォトン(ボソン)	マグノン(ボソン)
金属の比熱 = 自由電子の比熱	+ 格子振動の比熱	+ スピンの比熱 + ……
$\gamma T$	$aT^3$	