

注意 途中の式を書いていないものは採点しない。

1. 二準位系についてカノニカル分布(正準分布)を用いて以下の問いに答えよ。

(ア) 二準位のエネルギーを $\pm \varepsilon$ とすると、一粒子の分配関数を書け

(イ) 一粒子あたりのヘルムホルツエネルギー F を求めよ。 ヒント $e^{-\beta F} = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i}$

(ウ) 一粒子あたりのエントロピーを求めよ。さらに、絶対零度及び高温の極限で、エントロピーはどのような値に近づくかをそれぞれ調べよ。

(エ) 一粒子あたりの内部エネルギー $E \equiv \langle E \rangle$ を求め、絶対零度で F と一致することを示せ。

(オ) 一粒子あたりの比熱 C を求めよ。 ヒント 内部エネルギーを温度で微分。

(カ) 一粒子あたりの内部エネルギーの二乗 E^2 を求め、エネルギーのばらつき(ゆらぎ)

$\langle [E - \langle E \rangle]^2 \rangle = \langle E^2 - 2E\langle E \rangle + \langle E \rangle^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ を計算し C と比較せよ。(講義範囲外)

ヒント: $E^2 = \sum_i \varepsilon_i^2 e^{-\beta \varepsilon_i} / Z$ を使えば良い。

2. 三次元の箱の中の自由粒子(スピン $\frac{1}{2}$)について以下の問いに答えよ。

但し、箱の一辺の長さは L とし、 $V \equiv L^3$ とする。

(ア) 周期境界条件を用いて、運動量の取り得る値を求めよ。

(イ) 状態密度を求めよ。(片スピン分か両スピン分か明記せよ)

ヒント: $\frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}$ を $d\varepsilon$ の積分に変数変換したときの係数が状態密度である。

(ウ) 絶対零度での化学ポテンシャルを平均粒子数 N を用いて表せ。

ヒント: 片スピン分の状態密度について $N = 2 \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$ である。

(エ) 絶対零度での内部エネルギーを N で表せ。

(オ) 絶対零度での圧力を N で表せ。

ヒント: $E = E(S, V)$ であるから、 V で微分すればよい。符号は $p > 0$ からわかる筈。

統計力学 II 期末試験 2002 年 2/1

1. 二準位系(磁場中の $+1/2$ のスピン、古典統計)の熱力学諸量(S, E, F, M, C)について、各変数の温度・磁場依存性をグラフにし、 E と M のゆらぎに対する C と磁化率との関係を論ぜよ。
2. 二準位系に二つの粒子を入れた場合の占有数について古典統計と量子統計での違いを述べよ。
3. Z を高温展開して先の熱力学的諸量の高温極限での振る舞いを論ぜよ。

・感想をどうぞ。