

注意 途中の計算式や説明が無いもの、出題問題と関係ない解答は採点できません。

(いずれの問題も、解答だけしか書いていないものは採点できません)

一次元調和振動子ポテンシャル中の粒子(スピンゼロ)の状態密度

1. 一次元調和振動子ポテンシャル $U \propto x^2$ 中のスピンゼロの粒子の積分状態密度 $N(\varepsilon)$ を求めましょう。一次元調和振動子の固有エネルギーは $\varepsilon = \hbar\omega n_x$ で与えられるとします(零点エネルギーは無視)。 ω は定数、 n_x はゼロまたは正の整数とします。

・ヒント 条件を満たす n_x の個数は n_x 座標における線分の長さです。

2. 前問で求めた積分状態密度 $N(\varepsilon)$ から、状態密度 $D(\varepsilon)$ を計算しましょう。

一次元調和振動子ポテンシャル中のボース粒子(スピン1)

3. 一次元調和振動子ポテンシャル中に N 個のボソン($S=1$)がある場合に、 N を状態密度とボース分布関数 $(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1)^{-1}$ を用いた積分で表しましょう。但し、化学ポテンシャルを μ とします。

4. 問3の積分を変数変換 ($x = \beta\varepsilon$) し、次に、 $Y \equiv e^{-x+\beta\mu}$ と置いて、

テイラー展開 $1/(1-Y) = 1+Y+Y^2+\dots$ で級数の形に直し、積分を実行しましょう。

5. 温度を下げて行ったときに問3の積分が一定値を保てなくなるかどうか調べ、ボースアインシュタイン凝縮が起きるかどうかを説明しましょう。

・ヒント: 級数 $1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}+\dots$ は発散します。また、ボースアインシュタイン凝縮は、温度を下げたときに、 μ がどのように変化しても積分を一定に保てなくなったときにのみ起きます。

一次元調和振動子ポテンシャル中のフェルミ粒子(スピン $1/2$)

6. 一次元調和振動子ポテンシャル中のフェルミオン($S=1/2$)の状態密度を求めましょう。

7. 絶対零度において、粒子数 N を状態密度とフェルミ分布関数 $(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1)^{-1}$ を用いた積分で表し、フェルミエネルギー E_F を求めましょう。 N が増えると E_F が上がる理由も述べましょう。

8. 絶対零度での一粒子あたりの平均エネルギー $\langle E \rangle$ を求め、 E_F との比を調べて下さい。

9. 絶対零度での一粒子あたりのエネルギーの標準偏差を計算してみましょう。

・ヒント: $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 - 2E\langle E \rangle + \langle E \rangle^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$

10. 絶対零度において、ポテンシャルの「容器」を外部から力を加え、 ΔL だけ縮めると ω が $\omega \cdot (1 - \Delta L/L)$ のように変化したとします(但し、 L は定数)。このときのフェルミエネルギーの変化 $-\partial E_F / \partial \Delta L$ を計算しましょう(実はこれは「圧力」です)。

・ヒント: $-\partial E_F / \partial \omega$ を計算して、微分の変数変換で $-\partial E_F / \partial \Delta L$ を求めればよいのです。

おまけ

11. フェルミ温度、フェルミ周波数、フェルミ運動量、フェルミ速度、フェルミ波数、フェルミ波長を E_F (及び、 \hbar, k_B, m) を使って表しましょう。

お疲れ様でした。コメントをどうぞ(2行程度でお願いします)。