## 1. 古典的な方程式論

**1–1. 3 次方程式の Cardano の公式.** $f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

但し、3 乗根は掛けて $-\dfrac{p}{3}$ となるように取る。そのような 3 乗根の 1 組を $u, v$ とすると、

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v \qquad (\omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

- 3 実根の場合は $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 < 0$ となり、負数の平方根を経由する
  $\cdots$ "不還元の場合 (Casus irreducibilis)"

**1–2. 4 次方程式の Ferrari の解法.** $f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$ を解くのに、補助変数 $t$ を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

と変形、この右辺が完全平方になるように、$t$ を次で定めて解く。

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0 \qquad : 3\text{ 次分解式 (resolvent)}$$

$T := 2t$ とおいて、$R(T) := -g\left(\frac{t}{2}\right) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$

**1–3. 判別式.** $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = a_0\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ に対し、

$$D(f) = D(f, X) := a_0^{2(n-1)} \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2 : f \text{ の}\textbf{判別式 (discriminant)}$$

- $f$ が重根を持つ $\iff D(f) = 0$
- $D(f)$ は $a_i$ 達の多項式で表せる (斉次で次数 $2(n-1)$、斉重で重さ $n(n-1)$)
- $f(X) = aX^2 + bX + c$ のとき $D(f) = b^2 - 4ac$
- $f(X) = X^3 + pX + q$ のとき $D(f) = -4p^3 - 27q^2$
- $g(Y) := f(aY + b)$ とおくとき、$D(g, Y) = D(f, X)$
- $h(Z) := Z^n f(1/Z)$ とおくとき、$D(h, Z) = D(f, X)$

**1–4. 終結式.**

$$\begin{cases} f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = a_0\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \\ g(X) = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \cdots + b_{m-1}X + b_m = b_0\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(X - \beta_j) \end{cases}$$

に対し、

$$R(f, g) := a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j) : f, g \text{ の}\textbf{終結式 (resultant)}$$

- $f, g$ が共通根を持つ $\iff R(f, g) = 0$
- $R(f, g)$ は $a_i, b_j$ 達の多項式で表せる
  ($a$ に関して斉 $m$ 次、$b$ に関して斉 $n$ 次、$a, b$ 併せて斉重で重さ $mn$)
- $f, g$ から $X$ を消去して得られる多項式
- 行列式表示あり (Sylvester の消去法)
- $R(g, f) = (-1)^{mn}R(f, g)$
- $R(f, g) = a_0^m \displaystyle\prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)$
- 互除法によっても計算できる
- $aD(f) = (-1)^{n(n-1)/2}R(f, f')$ ($f'$: $f$ の微分)