3. 体の作り方

3–1. **整域の分数化 (全商環).** R : 整域 $\supset S := R \setminus \{0\}$: 積閉に対し、分数環 $S^{-1}R$ は体を成す。**分数体 (field of fraction)・商体 (quotient field)**) と呼び、しばしば $\mathrm{Frac}(R), Q(R)$ 等と書く。

- 例: $\mathrm{Frac}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Q}$。体 K に対し $\mathrm{Frac}(K[X]) = K(X)$。

3–2. **極大 ideal で割る.** R : 可換環 $\supset \mathfrak{m}$: 極大 ideal に対し、剰余環 $R/\mathfrak{m}$ は体を成す。

- 例: $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} =: \boldsymbol{F}_p$: p 元体。$\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1) \simeq \boldsymbol{C}$。

3–3. **有理関数体 (超越元添加).** 体 K と不定元 X とに対し、X を変数とする K 係数の分数式全体 $K(X)$ は体を成す。**K 上の (1 変数) 有理関数体 (rational function field over K (in one variable))** という。(上述のように $K(X) = \mathrm{Frac}(K[X])$ である。)

- 2 変数以上も考えられる。$K(X,Y) = K(X)(Y)$ 等。

4. 体の拡大

4–1. **体の拡大・拡大次数.** L, K : 体で、L の演算の制限が K の演算となっているとき、K を L の**部分体 (subfield)**、L を K の**拡大体 (overfield, extension field)** と呼ぶ。このような体の組 $L \supset K$ を体の**拡大 (extension)** と言って、L/K と表す (剰余群ではない。文脈で判断)。

- 体の拡大 L/K に於いて、L は自然に K-線型空間と見做せる。
- $[L:K] := \dim_K L$: 拡大 L/K の (L の K 上の) **次数 (degree)**
- $[L:K] = \infty$ のこともある。(例: $L = K(X)$: K 上の有理関数体のとき)
- $L \supset M \supset K$ のとき、M を L/K の**中間体 (intermediate field)** という。
- L/K の中間体 M に対し、 $[L:K] = [L:M][M:K]$
- L/K の中間体 M_1, M_2 に対し、$M_1 \cap M_2$ も L/K の中間体。

4–2. **体の生成.** 体の拡大 L/K に於いて、L の部分集合 S に対し、S を含む L/K の最小の中間体を $K(S)$ と書き、K 上で S が**生成 (generate) する**体という。$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ のとき、単に $K(x_1, \ldots, x_n)$ と書く。

- 例: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}(i)$。また、一般に $K(x,y) = K(x)(y)$ 等。
- L/K の中間体 M_1, M_2 に対し、$K(M_1 \cup M_2)$ を M_1, M_2 の (L 内での) **合成体 (composition field)** と呼び、通常 M_1M_2 と書く。

4–3. **代数拡大・超越拡大.** 体の拡大 L/K に於いて、

- $x \in L$ が **K 上代数的 (algebraic over K)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) = 0$
- $x \in L$ が **K 上超越的 (transcendental over K)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x が K 上代数的でない $\Longleftrightarrow \forall f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) \neq 0$
- 拡大 L/K が**代数的 (algebraic)・代数拡大 (algebraic extension)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in L$ が K 上代数的
- 拡大 L/K が**超越的 (transcendental)・超越拡大 (transcendental extension)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ L/K が代数的でない $\Longleftrightarrow \exists x \in L$ が K 上超越的
- $x \in L$: K 上代数的の時、$f(x) = 0$ なる $f \in K[X] \setminus \{0\}$ の最小次数のものは K 上既約で、非零定数倍を除き一意的。(通常最高次係数が 1 のものを) x の K 上の**最小多項式 (minimal polynomial)** という ($\mathrm{Irr}(x,K)(X)$ 等と書く)。
- $\mathfrak{p} := \mathrm{Ker}(K[X] \to L; \varphi \mapsto \varphi(x))$ とすると、$\mathfrak{p}$: 素 ideal $\subset K[X]$ で、
  - $\star$ x : K 上代数的 ($f(X) := \mathrm{Irr}(x,K)(X) \in K[X]$ とおく)
    $\Longleftrightarrow \mathfrak{p} = (f)$ で $K(x) = K[x] \simeq K[X]/\mathfrak{p}$、$[K(x):K] = \deg f$
  - $\star$ x : K 上超越的 $\Longleftrightarrow \mathfrak{p} = \{0\}$ で $K(x) \simeq K(X)$、$[K(x):K] = \infty$
- $[L:K] < \infty$ (有限次拡大) のとき、L/K : 代数的
- L/K : 代数的でも $[L:K] < \infty$ (有限次拡大) とは限らない