6. 根体・分解体

6–1. K **上の同型.** $L_1, L_2/K$: K の拡大に対し、

- $\sigma : L_1 \to L_2$: 体の (中への) 同型射が**中への** K **上の同型射 (中への** K**-同型射)** $\overset{\text{def}}{\iff} \sigma|_K = \mathrm{id}_K$
- 特に σ: 全射のとき、K **上の同型射 (**K**-同型射,isomorphism over** K**)** という。
- L_1, L_2 : K **上同型 (**K**-同型,isomorphic over** K**)** $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\sigma : L_1 \to L_2$: K-同型射

6–2. **根体.** 体 K 上の既約多項式 $f \in K[X]$ の 1 根 x を添加した体 $K(x)$ を f の K 上の**根体 (root field)** と呼ぶ。

- (根体の構成・構造) 根体は $K[X]/(f)$ として構成できる／と K-同型。

6–3. **分解体.** 体 K 上の多項式 $f \in K[X]$ に対し、

- 拡大体 L/K が f の K 上の**分解体 (splitting field)**
  $\overset{\text{def}}{\iff} L[X]$ 内で $f(X)$ が 1 次式の積に分解する: $f(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$
- $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: f の K 上の**最小分解体 (minimal splitting field)** (これを単に分解体と呼ぶこともある)

7. 代数閉体・代数閉包

7–1. **代数閉体.** 体 K が次の同値な条件を満たす時、K が**代数閉体 (algebraic closed field)** であるという。

- K の代数拡大は K 自身のみ
- $K[X]$ の既約多項式は 1 次式のみ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で 1 次式の積に分解
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内に重複を数えて $(\deg f)$ 個の根を持つ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で少なくとも 1 つ根を持つ

7–2. **代数閉包.** 体 K の代数拡大で代数閉体であるものを K の**代数閉包 (algebraic closure)** という。

- **定理**: 任意の体 K に代数閉包が存在する。K-同型を除いて一意的 ($\overline{K}$ と書く)。

体拡大 L/K に於いて、

- $\{x \in L | x : K$ 上代数的$\}$: L/K の中間体 (K の L 内での**代数閉包**)

Ω: 代数閉体 $\supset K$ に対し、

- K の Ω 内での代数閉包は K の代数閉包。Ω に含まれる K の代数閉包は一意的。
- L/K: 代数拡大に対し、$\exists\sigma : L \to \Omega$: 中への K-同型
  (しばしば K 上の**埋込 (embedding)** という)

8. 演習 (2)

問 8–1. 次の $\boldsymbol{Q}$ 上の多項式 $f \in \boldsymbol{Q}[X]$ について、$\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体 K を求めよ。(簡単な生成元 (複数可) を添加する形で表示せよ。) その $\boldsymbol{Q}$ 上の拡大次数 $[K : \boldsymbol{Q}]$ は ?

(1) $f(X) = X^3 - 2$　　(2) $f(X) = X^5 - 2$
(3) $f(X) = X^4 - 5X^2 + 6$　　(4) $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1$
(5) $f(X) = X^4 - 20X^2 + 32$　　(6) $f(X) = X^4 - 10X^2 + 5$

問 8–2. 体 K 上の n 次既約多項式 $f \in K[X]$ の根体の一つを L とする。K を含む代数閉体 Ω に対し、

(1) L の Ω への K 上の埋込 $\sigma : L \to \Omega$ が存在する。
(2) L の Ω への K 上の埋込は高々 n 個。

問 8–3. より一般に、体 K 上の有限次拡大 (従って代数拡大) L/K に対し、K を含む代数閉体 Ω への、L の K 上の埋込は高々 $[L : K]$ 個。