9. 共役・正規拡大

9–1. K **上の埋込.** L/K : 代数拡大、Ω : 代数閉体 $\supset K$ に対し、

- $\mathrm{Emb}_K(L,\Omega) := \{\sigma : L \to \Omega | K$ 上の (中への) 同型射 (埋込)$\}$
- $\mathrm{Aut}_K(L) = \mathrm{Aut}(L/K) := \{\sigma : L \to L | K$ 上の同型射 $\}$: L/K の自己同型群

$L/M/K$: 代数拡大に対し、

- ${\mathrm{res}_M}^L : \mathrm{Emb}_K(L,\Omega) \to \mathrm{Emb}_K(M,\Omega); \sigma \mapsto \sigma|_M$: 制限射は全射
- $\#\mathrm{Emb}_K(L,\Omega) = \#\mathrm{Emb}_K(M,\Omega) \cdot \#\mathrm{Emb}_M(L,\Omega)$

9–2. **共役.** $x \in \overline{K}$ に対し、$f(X) := \mathrm{Irr}(x,K)(X) \in K[X]$: K 上の最小多項式とするとき、f の根 $y \in \overline{K}$ を、x の K 上の**共役 (conjugate)** という。

- $\mathrm{Conj}(x,K) := \{y \in \overline{K} | f(y) = 0\}$: x の K 上の共役全体 (余り一般的でない)
- $\mathrm{Conj}(x,K) \longleftrightarrow \mathrm{Emb}_K(K(x),\overline{K})$: 全単射

$$y \leftrightsquigarrow (\sigma_y : x \mapsto y)$$

- $\#\mathrm{Emb}_K(K(x),\overline{K}) = \#\mathrm{Conj}(x,K) \le [K(x):K]$

9–3. **有限次代数拡大の基本的な不等式.** L/K: 有限次 (代数) 拡大、Ω : 代数閉体 $\supset L \supset K$ に対し、

$$\#\mathrm{Aut}(L/K) \le \#\mathrm{Emb}_K(L,\Omega) \le [L:K]$$

9–4. **正規拡大.** 代数拡大 L/K が次の同値な条件を満たす時、**正規拡大 (normal extension)** であるという。

- $\forall x \in L : \mathrm{Conj}(x,K) \subset L$
- $\forall x \in L : \forall \sigma \in \mathrm{Emb}_K(L,\overline{K}) : \sigma(x) \in L$
- $\forall \sigma \in \mathrm{Emb}_K(L,\overline{K}) : \sigma(L) = L$
- $\mathrm{Aut}(L/K) = \mathrm{Emb}_K(L,\overline{K})$
- $\forall x \in L$ に対し、$f(X) = \mathrm{Irr}(x,K)(X) \in K[X]$ が $L[X]$ 内で 1 次式の積に分解

$L_1, L_2/K$: 代数拡大に対し、

- $L_1, L_2/K$: 共に正規 $\Rightarrow L_1L_2, L_1 \cap L_2$: 正規 (無限個でも可)

$L/M/K$: 代数拡大に対し、

- L/K: 正規 $\Rightarrow L/M$: 正規 (M/K: 正規とは限らない)
- $L/M, M/K$: 共に正規でも L/K: 正規とは限らない

L/K: 有限次 (代数) 拡大に対し、L/K: 正規 $\Leftrightarrow \#\mathrm{Aut}(L/K) = \#\mathrm{Emb}_K(L,\Omega)$

9–5. **正規閉包.** 代数拡大 L/K に対し、L を含む K の最小の正規拡大を L/K の**正規閉包 (normal closure)** という。

- L/K の正規閉包は L の K 上の共役体全ての合併体
- $x \in \overline{K}$ に対し、$K(x)/K$ の正規閉包は $\mathrm{Irr}(x,K)(X) \in K[X]$ の K 上の最小分解体

10. 演習 (3)

問 10–1. 単純拡大 $K(x)/K$ $(x \in \overline{K})$ が正規拡大 $\Leftrightarrow \mathrm{Conj}(x,K) \subset K(x) \Leftrightarrow f(X) := \mathrm{Irr}(x,K)(X) \in K[X]$ が $K(x)[X]$ 内で 1 次式の積に分解。

問 10–2. 次の体拡大 L/K は正規拡大であるか。正規でないなら正規閉包 $\widetilde{L}/K$ は？(簡単な生成元 (複数可) を添加する形で表示せよ。) その拡大次数 $[\widetilde{L}:K]$ は？(但し、(7) (8) では、t は不定元 (即ち、それぞれ $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{C}$ 上超越的) で、K は有理関数体である。)

(1) $K = \boldsymbol{Q} \subset L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$
(2) $K = \boldsymbol{Q} \subset L = \boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$
(3) $K = \boldsymbol{Q} \subset L = \boldsymbol{Q}(\sqrt[4]{2})$
(4) $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) \subset L = \boldsymbol{Q}(\sqrt[4]{2})$
(5) $K = \boldsymbol{Q} \subset L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{5+2\sqrt{5}})$
(6) $K = \boldsymbol{Q} \subset L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{10+2\sqrt{17}})$
(7) $K = \boldsymbol{Q}(t) \subset L = K(\sqrt[3]{t})$
(8) $K = \boldsymbol{C}(t) \subset L = K(\sqrt[3]{t})$

問 10–3. $L_1, L_2/K$: 共に正規拡大の時、合併体 L_1L_2 及び共通部分 $L_1 \cap L_2$ が再び K 上正規であることを示せ。(K の正規拡大の無限族 $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ でも同様。)