問 18–1. $\boldsymbol{Z}$ 上の monic な多項式 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \boldsymbol{Z}[X]$ $(a_n = 1)$ に対し、f が有理数の根 $x \in \boldsymbol{Q}$ を持つならば、$x \in \boldsymbol{Z}$ かつ $x|a_0$ である。(ヒント: $x = n/d, d, n \in \boldsymbol{Z}, (d, n) = 1$ と既約分数で書いて、d の素因子 p について考察せよ。)

問 18–2. 上問を用いて、次の多項式が $\boldsymbol{Z}$ 上 (従って $\boldsymbol{Q}$ 上) 既約であることを示せ。

(1) $f(X) = X^3 + 2X - 1$
(2) $f(X) = X^3 + X - 6$

問 18–3. 素数 p に対し、自然な射影 $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}_p$ から定まる環準同型 $\boldsymbol{Z}[X] \to \boldsymbol{F}_p[X]$ による $f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ の像を $\overline{f}(X) \in \boldsymbol{F}_p[x]$ と書くことにする。$f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ に対し、或る素数 p について $\overline{f}(X) \in \boldsymbol{F}_p[x]$ が既約なら、f は $\boldsymbol{Z}$ 上 (従って $\boldsymbol{Q}$ 上) 既約。

問 18–4. 次の多項式 $f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ の既約性を、幾つかの素数 p に対する $\mathrm{mod} p$ での分解 ($\overline{f}(X) \in \boldsymbol{F}_p[x]$ の分解) を考えることにより、判定せよ。

(1) $f(X) = X^3 + 3X + 9$
(2) $f(X) = X^3 + 2X + 8$
(3) $f(X) = X^4 + 5X^2 + 2X + 15$

問 18–5. $f(X) := X^4 - 10X^2 + 1$: $\boldsymbol{Z}$ 上既約。(ヒント: まづ 1 次因子を持たないこと、次に 2 次式 2 つの積にならないことを確かめよ。)

問 18–6. 第 8 円分多項式 $\Phi_8(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ について、

(1) $\Phi_8(X)$ を求め、その $\boldsymbol{Z}$ 上での既約性を直接判定せよ。
(2) $\Phi_8(X)$ が $\mathrm{mod} p$ で 1 次式の積に分解するような素数 p の条件を決定せよ。(ヒント: $\boldsymbol{F}_p^\times$ 内に 1 の原始 8 乗根が存在する条件は ?)
(3) 任意の素数 p に対し、$\Phi_8(X)$ は $\mathrm{mod} p$ で可約 (若干の初等整数論の知識が要る)。

問 18–7. 素数 p に対し、

(1) 第 p 円分多項式 $\Phi_p(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ を求めよ。
(2) $g(Y) := \Phi_p(Y + 1) \in \boldsymbol{Z}[X]$ とおくと、g は $\boldsymbol{Z}$ 上 (従って $\boldsymbol{Q}$ 上) 既約。(ヒント: Eisenstein の既約性判定法が使える。)
(3) Φ_p : $\boldsymbol{Z}$ 上 (従って $\boldsymbol{Q}$ 上) 既約。
(4) $\prod_{\zeta \in \mu_p^*} (1 - \zeta) = p$ を示せ。
(5) 判別式 $D(\Phi_p) = ?$

問 18–8. $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \boldsymbol{C}$ とおく。$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ を ζ_n で表せ。

問 18–9. 上問で $n = 5$ として、

(1) $\omega_5 := 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。その判別式は ?
(2) ζ_5 を根号を用いて表せ。
(3) 正五角形を定規とコンパスとを用いて作図せよ。

問 18–10. $\omega_7 := 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。その判別式は ?

問 18–11. 正整数 $n \geq 1$ と、相異なる n 個の整数 $a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$ に対し、

$f(X) := \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) + 1 \in \boldsymbol{Z}[X]$ を考える。

(1) n : 奇数 $= 2k + 1$ のとき、f : $\boldsymbol{Z}$ 上既約。
(2) n : 偶数 ≥ 4 のとき、f は $\boldsymbol{Z}$ 上可約たり得るか。