19. 演習 (7)・有限群の復習と例

問 19–1.　**Sylow の定理**について調べよ。

問 19–2.　有限群 G に対し、

(1) 左移動 $\ell_a : G \to G; g \mapsto ag$ は全単射。

(2) $L : G \to S(G); g \mapsto \ell_g$ は群の単射準同型。(ここに $S(G) := \{\varphi : G \to G | \varphi :$ 全単射$\}$: G 上の**対称群 (symmetric group)** で、$\#G = n$ の時、n 次対称群 S_n と同型。)

(3) 全ての有限群は対称群の部分群として実現できる。

問 19–3.　n 次対称群 S_n は、変数の置換 $\sigma{\cdot}X_i := X_{\sigma(i)}$ により、n 変数多項式環 $\boldsymbol{Q}[X_1, \ldots, X_n]$、及び n 変数有理関数体 $\boldsymbol{Q}(X_1, \ldots, X_n)$ に作用する。

(1) 差積 $\Delta := \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (X_i - X_j)$ が生成する部分 $\boldsymbol{Q}$-線型空間 $V := \boldsymbol{Q}\Delta$ は S_n-不変。
(注: 元毎固定ではない。$\forall\sigma \in S_n : \sigma(V) \subset V$ の意味。)

(2) S_n の V への作用により、準同型 $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ が定まる。

(3) $\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} = A_n$ (n **次交代群 (alternating group)**)

問 19–4.　n 次対称群 S_n について、$S_n = \langle (1\ 2\ \cdots\ n), (1\ 2) \rangle$.

問 19–5.　n 次対称群 S_n の部分群 G が次を満たす時、G は**推移的 (可移, transitive)** であるという。

- $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : \exists\sigma \in G : \sigma(i) = j$

G が S_n の可移部分群ならば、$n | \#G$ である。

問 19–6.　p を素数とする。S_p の可移部分群 H が互換を含めば、$H = S_p$ である。

問 19–7.　3 次対称群 S_3 の部分群を総て列挙し、包含関係を図示せよ。その中で正規部分群であるもの・推移的であるものはどれか。

問 19–8.　(即答せよ) n 次巡回群 $C_n = \langle \sigma | \sigma^n = 1 \rangle$ の部分群を総て挙げよ。

問 19–9.　p を素数とする。p 次巡回群 C_p の直積 $G := C_p \times C_p$ の、位数 p の部分群の個数は？

問 19–10.　正整数 $n \ge 1$ に対し、次の生成元と関係式とで定まる群 D_n を n 次の**二面体群 (dihedral group)** と呼ぶ。(D_{2n} と書く流儀もある。)

- $D_n := \langle \sigma, \tau | \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$

D_n の各元は $\sigma^i\tau^j$ $(0 \le i \le n-1; j = 0, 1)$ の形に一意に書ける。従って、$\#D_n = 2n$。

問 19–11.　n 次二面体群 D_n を、n 次対称群 S_n の部分群として実現せよ。

問 19–12.　上問で $n = p$: 素数として、D_p を考える。

(1) D_p の各元の位数は？

(2) D_p の各共役類を求めよ。

(3) D_p の中心及び交換子群を求めよ。

(4) D_p の部分群を総て挙げよ。その中で正規部分群であるものはどれか。

問 19–13.　4 次の二面体群 $D_4 = \langle \sigma, \tau | \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$ $(\#D_4 = 8)$ について、

(1) 各元の位数は？ 共役類は？

(2) 中心は？ 交換子群は？

(3) 部分群を総て列挙し、包含関係を図示せよ。その中で正規部分群なのは？

(4) $\varphi(\sigma) = \sigma, \varphi(\tau) = \sigma\tau$ により、自己同型 $\varphi : D_4 \to D_4$ $(\varphi \in \operatorname{Aut}(D_4))$ が定まる。

(5) 上の φ は内部自己同型ではない。

(6) 外部自己同型群 $\operatorname{Out}(D_4) := \operatorname{Aut}(D_4)/\operatorname{Inn}(D_4)$ を求めよ。

問 19–14.　4 次対称群 S_4 において、

(1) $V := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ は S_4 の正規部分群を成す。

(2) $S_4/V \simeq S_3$ を示せ。また、この同型射をなるべく自然な形で構成せよ。(即ち、或る 3 元集合 X に S_4 が作用し、その作用核 (どの元も動かさない部分群) が V となるような設定を見出せ。)

問 19–15.　4 次対称群 S_4 の可移部分群 (の共役類) を決定せよ。