問 21–1. Galois 拡大 L/K に対し、$G := \mathrm{Gal}(L/K)$ とし、$\mathcal{H}_G := \{H | G$ の部分群$\}$, $\mathcal{M}_{L/K} := \{M | L/K$ の中間体$\}$ とおく。$\Phi : \mathcal{M}_{L/K} \longrightarrow \mathcal{H}_G; M \longmapsto \mathrm{Aut}(L/M)$ と $\Psi : \mathcal{H}_G \longrightarrow \mathcal{M}_{L/K}; H \longmapsto L^H$ とが共に全単射で互いに逆写像、かつ共に包含関係に関して順序逆同型であることを認めた上で、以下を示せ。

(1) $H_i \leftrightsquigarrow M_i$ のとき、$H_1 \cap H_2 \leftrightsquigarrow M_1M_2, \langle H_1, H_2\rangle \leftrightsquigarrow M_1 \cap M_2$。
(2) $H \leftrightsquigarrow M$ のとき、$\forall \sigma \in G$ に対し、$\sigma H \sigma^{-1} \leftrightsquigarrow \sigma(M)$。
(3) 特に、$H \lhd G \Leftrightarrow M/K : \mathrm{Galois}$ で、この時、$G/H \simeq \mathrm{Gal}(M/K)$

問 21–2. $K = \boldsymbol{Q}$ とする。$L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 及び $L = \boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ のそれぞれに対し、体拡大 L/K は Galois 拡大である。$G := \mathrm{Gal}(L/K)$ とする。

(1) $d := [L : K] = ?$ $\#G = ?$
(2) L/K の各生成元の像を与えることにより、G の元を総て列挙せよ。また、G の群構造を決定せよ。
(3) G の部分群を総て列挙し、包含関係を図示せよ。
(4) それぞれの固定体を求め、包含関係を図示せよ。

問 21–3. 次の各 $x \in \overline{\boldsymbol{Q}}$ に対し、$\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $f(X) := \mathrm{Irr}(x; \boldsymbol{Q})(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ を求め、その分解体 K を $\boldsymbol{Q}$ に適切な元 (複数でも良い) を添加した形で表せ。$K/\boldsymbol{Q}$ の Galois 群 $G := \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q})$ を決定し、上問と同様のことをせよ。

(1) $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$　　(2) $x = \sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$　　(3) $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

問 21–4. 第 n 円分多項式 $\Phi_n(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ を考える。1 の原始 n 乗根の一つを取って固定し、ζ_n と書く。ζ_n は $\Phi_n(X)$ の根の一つである。

(1) Φ_n の $\boldsymbol{Q}$ 上の分解体は第 n 円分体 $K_n := \boldsymbol{Q}(\zeta_n)$。従って、$K_n/\boldsymbol{Q}$ は Galois 拡大。
(2) $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_n/\boldsymbol{Q})$ に対し、$\chi_n(\sigma) := a \bmod n$ (ここに $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^a$) によって、単射群準同型 $\chi_n : \mathrm{Gal}(K_n/\boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times$ が定まる。
(3) $\Phi_n(X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上既約であることを認めると、χ_n は全射 (従って群同型)。

問 21–5. p を奇素数、ζ_p を 1 の原始 p 乗根の一つとし、$K := \boldsymbol{Q}(\zeta_p)$ とおく。$\overline{a} = a \bmod p \in (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$ に対し、$\sigma_a \in G := \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q}) \simeq (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$ を $\sigma_a(\zeta_p) = \zeta_p^a$ で定める。

(1) $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$: 位数 $p-1$ の巡回群。
(2) $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$ の生成元 (法 p に関する原始根) を一つ取って $\overline{g} = g \bmod p$ とする; $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times = \langle \overline{g} \rangle$。$(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$ の指数 2 の部分群 H を $\overline{g}$ を用いて表せ。
(3) $\xi_i := \displaystyle\sum_{j=0}^{(p-1)/2-1} \zeta_p^{g^{2j+i}}$ $(i = 0, 1)$ とする。$\xi_i \in K^H$ を示し、$\sigma_g(\xi_0), \sigma_g(\xi_1)$ を求めよ。
(4) $\xi_0 + \xi_1, \xi_0\xi_1 \in K^G = \boldsymbol{Q}$ を示し、その値を求めよ。
(5) $\xi_0 - \xi_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-2} (-1)^i \zeta_p^{g^i}$ は Gauss 和である (問 15–3 参照)。
(6) $(\xi_0 - \xi_1)^2 = ?$
(7) $\boldsymbol{Q}$ の 2 次拡大 K^H を求めよ。

問 21–6. p を奇素数とし、前問に引き続き p 分体 $K := \boldsymbol{Q}(\zeta_p)$ を考える。

(1) $K/\boldsymbol{Q}$ の中間体の次数は $p-1$ の約数。
(2) $p-1$ の各約数 d に対し、$K/\boldsymbol{Q}$ の d 次中間体が唯一つ存在する。
(3) 上問を参考に、$K/\boldsymbol{Q}$ の d 次中間体の生成元を見付けよ。

問 21–7. (例えば $n = 5, 7, 8, 9, 12$ など) 幾つかの n に対し、$(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times$ の群構造を決定し、部分群を列挙すると共に、対応する $\boldsymbol{Q}(\zeta_n)$ の部分体を求めよ。

問 21–8. 次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$
(2) $\cos \dfrac{2\pi}{7} \cos \dfrac{4\pi}{7} \cos \dfrac{8\pi}{7}$

(特に、“綺麗な” 値になる理由を Galois 理論から説明せよ。)