問 22–1. $f(X)=X^5-2\in\boldsymbol{Q}[X]$ の根体の一つを M、分解体を L とする。

(1) f の $K:=\boldsymbol{Q}(\zeta_5)$ 上の根体 KM は L と一致する。$N:=\mathrm{Gal}(L/K)$ の構造、及び適切な生成元を求めよ。
(2) $H:=\mathrm{Gal}(L/M)$ の構造、及び適切な生成元を求めよ。(ヒント: 推進定理)
(3) $G:=\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$ の構造を決定せよ。

問 22–2. 体 K 上の n 次分離多項式 $f\in K[X]$ の分解体を L とすると、L/K は Galois 拡大である。

(1) Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ は n 次対称群 S_n の部分群と同型。(ヒント: f の根への作用を考えよ。)
(2) 従って、$[L:K]|n!$。

問 22–3. 体 K 上の n 次既約分離多項式 $f\in K[X]$ の分解体 L に対し、

(1) Galois 群 $G:=\mathrm{Gal}(L/K)$ は、f の根への作用により n 次対称群 S_n の推移的部分群と同型。
(2) 従って、$n|[L:K]|n!$。

問 22–4. 体 K 上の n 次既約分離多項式 $f\in K[X]$ の分解体を L とし、その Galois 群 $G:=\mathrm{Gal}(L/K)$ を上問により S_n の推移的部分群と同一視する。f の判別式

$$D(f):=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2\in K \qquad (\text{ここに } x_1,\ldots,x_n:\ f \text{ の根})$$

が K の平方数 (即ち $\exists a\in K:D(f)=a^2$) $\Longleftrightarrow G\subset A_n$ (n 次交代群)。

問 22–5. $\zeta=\zeta_7:=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{7}}$ 及び $\omega=\omega_7:=2\cos\dfrac{2\pi}{7}=\zeta_7+\zeta_7^{-1}$ とおく。

(1) $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\zeta_7)/\boldsymbol{Q})\simeq(\boldsymbol{Z}/7\boldsymbol{Z})^\times$ の部分群を列挙せよ。
(2) $\boldsymbol{Q}(\omega_7)\subset\boldsymbol{Q}(\zeta_7)$ は $(\boldsymbol{Z}/7\boldsymbol{Z})^\times$ の如何なる部分群に対応するか。
(3) ω_7 の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役、及び $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $f(X):=\mathrm{Irr}(\omega_7;\boldsymbol{Q})(X)\in\boldsymbol{Q}[X]$ を求めよ。
(4) f の判別式 $D(f)$ を求めよ。それは $\boldsymbol{Q}$ の平方数であるか。

問 22–6. p を奇素数とする。

(1) p 次対称群 S_p の推移的部分群 G は p 次巡換を含む。
(2) S_p の部分群 G が p 次巡換と互換とを含めば、$G=S_n$ である。
(3) $\boldsymbol{Q}$ 上の p 次既約多項式 $f\in\boldsymbol{Q}[X]$ の根のうち、$p-2$ 個が実、2 個が虚であるとき、f の分解体 K について、$\mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q})\simeq S_p$ である。
(4) この条件を満たす多項式 f の例を挙げよ。

問 22–7. (**Artin の定理**) L を体とし、L の体自己同型群 $\mathrm{Aut}(L)$ の有限部分群 G を取り、G による固定体を $K:=L^G$ とするとき、L/K は Galois 拡大で、$\mathrm{Gal}(L/K)=G$。

問 22–8. $\boldsymbol{Q}$ 上の有理関数体 $L=\boldsymbol{Q}(t)$ を考える。

(1) $\mathrm{Aut}(L/\boldsymbol{Q})\simeq\mathrm{PGL}(2,\boldsymbol{Q}):=\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Q})/\boldsymbol{Q}^\times I_2$
(2) $\sigma:t\mapsto\dfrac{1}{1-t},\tau:t\mapsto\dfrac{1}{t}$ とするとき、$G:=\langle\sigma,\tau\rangle$ が有限群となることを示し、その構造を決定せよ。
(3) $K:=L^G$ とすると、K は再び $\boldsymbol{Q}$ 上の有理関数体となる。$K=\boldsymbol{Q}(s)$ となる $s\in K$ を見付けよ。
(4) t の K 上の最小多項式を求めよ。
(5) G の各部分群 H の固定体 L^H も再び $\boldsymbol{Q}$ 上の有理関数体となる。$L^H=\boldsymbol{Q}(s_H)$ となる $s_H\in L^H$ を見付けよ。