23. 正則表現・ノルム・トレース

23–1. **正則表現**. L/K : n 次拡大、$\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_n)$: L の K 上の基底とする。

- $a \in L$ に対し、$m_a : L \to L; x \mapsto ax$: a 倍写像は K-線型写像
  $\to$ 基底 $\mathcal{W}$ に関する行列表示により $\begin{array}{l} \varphi_{\mathcal{W}} : L \to \mathrm{M}(n, K) \\ a \mapsto (a_{ij})_{i,j} \end{array}$ (ここに $aw_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$)
  : $\mathcal{W}$ に関する L の K 上の**正則表現 (regular representation)**
- $\varphi_{\mathcal{W}}$: 結合的 K-代数の単射準同型 (環および K-線型空間としての単射準同型)

23–2. **ノルム・トレース**. L/K : n 次拡大、$\varphi_{\mathcal{W}} : L \to \mathrm{M}(n, K)$: 正則表現とするとき、

- $N_{L/K}(a) := \det \varphi_{\mathcal{W}}(a)$: L/K に関する a の**ノルム (norm)**
- $Tr_{L/K}(a) := \mathrm{tr}\varphi_{\mathcal{W}}(a)$: L/K に関する a の**トレース・跡和 (trace, Spur)**
- $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$: 乗法群の準同型
- $Tr_{L/K} : L \to K$: 加法群の準同型 (K-線型でもある)
- L/K : 分離的 $\Longleftrightarrow Tr_{L/K}$: 全射 $\Longleftrightarrow Tr_{L/K} \neq 0$
- (連鎖律) $L/M/K$ のとき、$N_{L/K} = N_{M/K} \circ N_{L/M}, Tr_{L/K} = Tr_{M/K} \circ Tr_{L/M}$
- L/K : 分離的のとき、$N_{L/K}(a) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathrm{Emb}_K(L, \overline{K})} \sigma(a), Tr_{L/K}(a) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Emb}_K(L, \overline{K})} \sigma(a)$

24. Kummer 拡大・Artin-Schreier 拡大

24–1. **Kummer 拡大**. K を体、$\mathrm{ch}(K) \nmid n$ とし、$K \ni \zeta_n$ (1 の原始 n 乗根) とする。

- n 次拡大 L/K が **Kummer 拡大** $\overset{\leftharpoondown}{\Longleftrightarrow} \exists a \in K^\times : L = K(\sqrt[n]{a})$
  - ⋆ 即ち、L は $X^n - a \in K[X]$ の根体 (= 分解体)
  - ⋆ この時、$a \bmod (K^\times)^n \in K^\times/(K^\times)^n$:位数 n
  - ⋆ L/K : n 次巡回拡大で、$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle$ (ここに $\sigma(\sqrt[n]{a}) = \zeta_n \sqrt[n]{a}$)
- 逆に、任意の n 次巡回拡大 L/K は Kummer 拡大

24–2. **Artin-Schreier 拡大**. K を体、$\mathrm{ch}(K) = p > 0$ とする。

- p 次拡大 L/K が **Artin-Schreier 拡大** $\overset{\leftharpoondown}{\Longleftrightarrow} \exists a \in K^\times : L = K(\alpha)$ (ここに $\alpha \in L$ は $X^p - X - a \in K[X]$ の根)
  - ⋆ この時、$X^p - X - a$: K 上既約
  - ⋆ L/K : n 次巡回拡大で、$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle$ (ここに $\sigma(\alpha) = \alpha + 1$)
- 逆に、任意の p 次巡回拡大 L/K は Artin-Schreier 拡大

25. 演習 (10)

問 25–1. 次の体拡大 L/K に於いて、適当な L の K-基底を取り、正則表現・ノルム・トレースを求めよ。

(1) $L = \boldsymbol{C}/K = \boldsymbol{R}$ (2) $L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})/K = \boldsymbol{Q}$ (3) $L = \boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})/K = \boldsymbol{Q}$

問 25–2. K を体、p を素数で、$\mathrm{ch}(K) \neq p$ とし、$K \ni \zeta_p$ (1 の原始 p 乗根) とする。$a \in K^\times$ に対し、$f(X) = X^p - a \in K[X]$ を考える。

(1) f : K 上既約 $\Leftrightarrow a \notin (K^\times)^p$
(2) f の根の一つを α とするとき、他の根は？
(3) f : K 上既約のとき、$K(\alpha)/K$: p 次巡回拡大で、$\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K) \simeq \mu_p; \sigma \leftrightsquigarrow \sigma(\alpha)/\alpha$

問 25–3. K を体、$\mathrm{ch}(K) = p > 0$ とする。$a \in K$ に対し、$\wp(a) := a^p - a$ とおき、$f(X) = X^p - X - a \in K[X]$ を考える。

(1) f : K 上既約 $\Leftrightarrow a \notin \wp(K)$
(2) f の根の一つを α とするとき、他の根は？
(3) f : K 上既約のとき、$K(\alpha)/K$: p 次巡回拡大で、$\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K) \simeq \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}; \sigma \leftrightsquigarrow \sigma(\alpha) - \alpha$