26. 超越拡大・代数的独立性

26–1. **代数的独立.** 体の拡大 L/K に於いて、有限部分集合 $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset L$ に対し、

- S : K 上**代数的独立 (algebraically independent)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \to L; X_i \mapsto x_i$: 単射準同型
  $\Longleftrightarrow \forall x \in S$: x が $K(S \setminus \{x\})$ 上超越的
  $\Longleftrightarrow \forall k = 1, \ldots, n$ に対し、x_k : $K(x_1, \ldots, x_{k-1})$ 上超越的

一般に、(無限かも知れない) 部分集合 $S \subset L$ に対しては、

- S : K 上**代数的独立** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ S の任意の有限部分集合が K 上代数的独立
  $\Longleftrightarrow \forall x \in S$: x が $K(S \setminus \{x\})$ 上超越的

26–2. **超越基底・超越次元.** 体の拡大 L/K に於いて、部分集合 $S \subset L$ に対し、

- S が L/K の**超越基底 (transcendental basis)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ S : K 上代数的独立かつ $L/K(S)$: 代数的
- **定理**: 任意の体拡大 L/K に対し、超越基底が存在する。超越基底 S の濃度は S に依らず L/K のみで定まる。(S の濃度を L/K の**超越次元 (transcendental degree)** と言い、$\mathrm{tr.deg}_K L, \mathrm{tr.deg}(L/K)$ 等と書く。)
- 注: L/K が代数的なら、超越基底は $\emptyset$ で、$\mathrm{tr.deg}_K L = 0$。
- n 変数有理関数体 $K(x_1, \ldots, x_n)$ について、$\mathrm{tr.deg}(K(x_1, \ldots, x_n)/K) = n$ となる。

26–3. **純超越拡大.** 体拡大 L/K に対し、

- L/K: **純超越的 (purely transcendental)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists S \subset L$: S が K 上代数的独立かつ $L = K(S)$
- 特に $\mathrm{tr.deg}_K L = n < \infty$ の時、L/K: 純超越的 $\Leftrightarrow L \simeq K(t_1, \ldots, t_n)$ (n 変数有理関数体)

26–4. **Liouville の定理.** Riemann 球面 $\mathbf{P}^1(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数体は、$\boldsymbol{C}$ 上の 1 変数有理関数体 $\boldsymbol{C}(X)$ と同型。

27. 演習 (11)

問 27–1. 体 K 上の有理関数体 $K(x)$ に於いて、$h = f/g \in K(x)$ ($f, g \in K[x]$ は互いに素で、$\deg f = n, \deg g = m$) とするとき、$[K(x) : K(h)] = \max\{n, m\}$。特に、$K(x) = K(h) \Longleftrightarrow \max\{n, m\} = 1$。

問 27–2. 体 K 上の有理関数体 $K(x)$ に対し、$\mathrm{Aut}_K(K(x)) \simeq \mathrm{PGL}(2, K)$。ここに $\mathrm{PGL}(2, K) := \mathrm{GL}(2, K)/K^\times I_2$: **射影一般線型群 (projective general linear group)** で、作用は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ で定める。(この作用を**一次分数変換 (linear fractional transformation)** という。)

問 27–3. $\boldsymbol{Q}$ 上の有理関数体 $K := \boldsymbol{Q}(x)$ を考える。$F(Y) := Y^2 - (1 - x^2) \in K[Y]$ の根 y を K に添加した体 $L := K(y) = \boldsymbol{Q}(x, y)$ は、再び $\boldsymbol{Q}$ 上超越次元 1 の純超越拡大である。即ち、$L = \boldsymbol{Q}(t)$ となる $t \in L$ が存在する。このような t を実際に見付けることによって、このことを示せ。

問 27–4. $\boldsymbol{C}$ 上の有理関数体 $K := \boldsymbol{C}(x)$ を考える。$F(Y) := Y^2 + (1 + x^2) \in K[Y]$ の根 y を K に添加した体 $L := K(y) = \boldsymbol{C}(x, y)$ は、再び $\boldsymbol{C}$ 上超越次元 1 の純超越拡大である。上問と同様にして、これを示せ。

問 27–5. $\boldsymbol{R}$ 上の有理関数体 $K := \boldsymbol{R}(x)$ を考える。上問と同じ多項式 $F(Y) := Y^2 + (1 + x^2) \in K[Y]$ の根 y を K に添加した体 $L := K(y) = \boldsymbol{R}(x, y)$ は、$\boldsymbol{R}$ 上超越次元 1 であるが、純超越拡大ではない。

問 27–6. $\boldsymbol{C}$ 上の有理関数体 $K := \boldsymbol{C}(x)$ を考える。$f(x) \in \boldsymbol{C}[X]$ を重根を持たない 3 次式とする。$F(Y) := Y^2 - f(x) \in K[Y]$ の根 y を K に添加した体 $L := K(y) = \boldsymbol{C}(x, y)$ は、再び $\boldsymbol{C}$ 上超越次元 1 の超越拡大であるが、純超越拡大ではない。($\boldsymbol{C}(x, y)$ は**楕円関数体**と呼ばれる。)

問 27–7. $\boldsymbol{Q}$ 上の有理関数体 $\boldsymbol{Q}(x)$ は可算濃度。一般に、体 K が可算なら $K(x)$ も可算。

問 27–8. $\boldsymbol{R}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の超越次元は有限でない。(実は可算ですらない。)