

2008年度秋期 代数学 IIe 中間試験 (担当:角皆)

問1. 体の拡大 L/K において、

- (1) L の元 x が K 上代数的であることの定義を述べよ。
- (2) 拡大 L/K が代数的であることの定義を述べよ。
- (3) 拡大 L/K の次数 $[L:K]$ の定義を述べよ。
- (4) 拡大次数 $[L:K]$ が有限であれば、拡大 L/K は代数的であることを示せ。

問2. 有限次拡大 L/K の中間体 M に対し、 $[L:K] = [L:M][M:K]$ を示せ。

問3. $x = \sqrt{8+2\sqrt{17}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ について、

- (1) x の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f(X) := \text{Irr}(x; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を求めよ。
- (2) x の \mathbb{Q} 上の共役をすべて挙げよ。
- (3) f の根体 $K := \mathbb{Q}(x)$ は \mathbb{Q} 上正規でないことを示せ。
- (4) K の \mathbb{Q} 上の正規閉包 \tilde{K} 、及びその拡大次数 $[\tilde{K}:\mathbb{Q}]$ を求めよ。

問4. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ に対し、

- (1) 拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (2) $K = \mathbb{Q}(\gamma)$ となる元 $\gamma \in K$ を (とにかく) 一つ見付けよ。また、 $K = \mathbb{Q}(\gamma)$ となることを示せ。
- (3) K に属する 1 の冪根を全て挙げ、それらが成す乗法群の構造を答えよ。

問5. 8元体 F_8 を構成せよ。

問6. 標数 $p(>0)$ の無限体の例を挙げよ。例に挙げた体を K とするとき、Frobenius 写像 $\varphi: K \rightarrow K; x \mapsto x^p$ は全射であるか。(出来れば二つ、趣の異なる例を挙げよ。)

問7. 3次方程式 $X^3 - 6X + 9 = 0$ を、以下の Cardano の方法に順って解こう。

- (1) $X = u + v$ と置き、 $u^3 + v^3 = (\text{定数})$ の形になるように、 uv の値を定めよ。
- (2) u^3, v^3 を 2 根とする 2 次多項式を求めよ。
- (3) u, v の値を定めて、元の方程式の解を求めよ。

2008年度秋期 代数学 IIe 中間試験 (担当:角皆)

実施: 2008年12月11日(木), 15:15 ~ 16:45, 3-348 教室

1. 一般的な諸注意

- 学生証を机上に提示すること。
- 上の場合を含め、入室は試験開始後 20 分まで認める。退室は試験開始後 30 分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷(白色かそれに近いもので無地)・時計(電卓機能等のないもの)のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞆の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始まで問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに学生番号・名前を答案用紙に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 答案用紙の 2 枚目以降が必要な場合は挙手して申し出ること。2 枚目以降にも学生番号・名前の記入を忘れずに。また、全ての用紙に何枚目中の何枚目かを記入すること。

2. 問題について

- 問題番号の順に解答する必要はないが、どこがどの問題か明確に判るようにすること。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。
- 問題の分量は 130 ~ 140 点分くらいのつもりである。