

1

(1) $f(X) = X^3 + pX + q$ の 3 根を x_1, x_2, x_3 とする。

(a) x_1, x_2, x_3 の基本対称式 (elementary symmetric polynomial)

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$$

を p, q で表せ。

(b) 根の差積の平方

$$D(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

を f の判別式 (discriminant) という。 $D(f)$ を p, q で表せ。

[ヒント: $D(f)$ を展開して、最高次の項を消すように s_1, s_2, s_3 の冪積を作って引き、残った項についてこれを繰り返す。 Maple, Mathematica, Risa/Asir などの数式処理ソフトウェアを用いても良い。]

(2) 3 次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

(a) 因数分解を見付けて解け。

(b) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。