

3 4次多項式 $f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ の4根を x_i ($i = 1, \dots, 4$) とし、

$$u := x_1x_2 + x_3x_4$$

と置く。

- (1) 添字の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ で u を不変にするものを全て挙げよ。
(u の固定群 $G_u = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma(u) = u\}$ を求めよ。)
- (2) 全ての置換で動かしたとき、 u が取る異なる値を全て挙げよ。
(u の軌道 $W := Gu = \{\sigma(u) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\}$ を求めよ。)
- (3) W の全ての元を不変にする置換を全て挙げよ。
(W の固定群 $G_W := \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \forall w \in W : \sigma(w) = w\}$ を求めよ。)
- (4) W の元を根とする多項式

$$R(T) := \prod_{w \in W} (T - w)$$

は、係数が根の対称式なので f の係数 p, q, r で書ける。これを求めよ。