4　素数 p と自然数 r との組 (p,r) で $q := p^r \leq 10$ なるもの

$$(p,r) = (2,2), (2,3), (3,2) \qquad (\text{即ち } q = 4, 8, 9)$$

に対し、

(1) 素体 $\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 上 r 次の既約多項式 $f(X) \in \boldsymbol{F}_p[X]$ を、とにかく見付けよ。
(2) $f(X)$ が $\boldsymbol{F}_p$ 上既約であることを、とにかく示せ。
(3) $K := \boldsymbol{F}_p[X]/(f)$ により q 元体 K を構成し、その乗積表を書け。
(4) Frobenius 同型 $\varphi : K \to K$ の関数表 (a と $\varphi(a)$ との対応表) を作れ。

$$a \mapsto a^p$$

(5) $\varphi^n = \mathrm{id}_K$ となる最小の正整数 n は何か。