あけまして

おめでとう

ございます

体の拡大の理論としての Galois 理論

体拡大 L/K の様子を、

自己同型群 $\mathrm{Aut}(L/K)$ で統制する

Galois 理論の基本定理
$$\parallel$$
中間体と部分群との対応

有限次代数拡大の基本的な不等式 (再掲)

L/K: 有限次 (代数) 拡大

$K \subset L \subset \Omega$: 代数閉体

$$\#\mathrm{Aut}(L/K) \leq \#\mathrm{Emb}_K(L, \Omega) \leq [L : K]$$

左の等号 $\iff L/K$: 正規

右の等号 $\iff L/K$: 分離

$\mathrm{Aut}(L/K)$ が望む限り大きくなるのは、
L/K が**正規**かつ**分離的**のとき

体の拡大の理論としての Galois 理論

“Galois 拡大” とは、

“$\mathrm{Aut}(L/K)$ が充分大きく、
体拡大 L/K を統制できる拡大”

実際の所、

L/K が正規かつ分離的、

即ち、$\#\mathrm{Aut}(L/K) = [L:K]$ であることが、

Galois 理論 (中間体と部分群との対応)
が機能するのに重要

体の拡大の理論としての Galois 理論

L/K : **体の拡大**

$$G := \mathrm{Aut}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) | \sigma|_K = \mathrm{id}\}$$

- $H \subset G$: **部分群に対し、**
  $L^H := \{x \in L | \forall \sigma \in H : \sigma(x) = x\}$
  : H **の固定体 (fixed field)**

- M : L/K **の中間体に対し、**
  $\mathrm{Aut}(L/M) = \{\sigma \in G | \forall x \in M : \sigma(x) = x\}$
  : L **の** M **上の自己同型群**

体の拡大の理論としての Galois 理論

自明に

$$\mathrm{Aut}(L/L^H) \supset H, \quad L^{\mathrm{Aut}(L/M)} \supset M$$

ここで $=$ が成り立つか？

一般には成り立たないが、Galois 拡大なら OK

体の有限次拡大 L/K が Galois 拡大

$$\Updownarrow$$

$$L^{\mathrm{Aut}(L/K)} = K$$

$$\Updownarrow$$

$$\#\mathrm{Aut}(L/K) = [L : K]$$

$$\Updownarrow$$

L/K **: 正規拡大 かつ 分離拡大**

この時、$\mathrm{Aut}(L/K) = \mathrm{Gal}(L/K)$ **と書き、**
L/K **の Galois 群 と呼ぶ。**

Galois 理論の基本定理

L/K: **Galois 拡大**、$G := \mathrm{Gal}(L/K)$: **Galois 群**

$\mathcal{H}_G := \{H | G$ **の部分群** $\}$

$\mathcal{M}_{L/K} := \{M | L/K$ **の中間体** $\}$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \Phi & \\
M & \longmapsto & \mathrm{Aut}(L/M) \\
 & \longrightarrow & \\
\mathcal{M}_{L/K} & & \mathcal{H}_G \\
 & \longleftarrow & \\
L^H & \longleftarrow\!\shortmid & H \\
 & \Psi &
\end{array}
$$

Galois 理論の基本定理

- Φ, Ψ : **共に全単射で、互いに逆写像**
  ($\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_G}, \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_{L/K}}$**)**
- Φ, Ψ : **共に包含に関して順序逆同型**
  ($H_i \leftrightsquigarrow M_i$ **のとき、**$H_1 \subset H_2 \Leftrightarrow M_1 \supset M_2$**)**

"中間体と部分群とが一対一対応"

Galois 対応
(Galois correspondence)

Galois 理論の基本定理

- $H_i \leftrightsquigarrow M_i$ **のとき、**

$$H_1 \cap H_2 \leftrightsquigarrow M_1 M_2$$

$$\langle H_1, H_2 \rangle \leftrightsquigarrow M_1 \cap M_2$$

- $M \in \mathcal{M}_{L/K}$ **に対し、**
  L/M **: Galois で、** $\mathrm{Gal}(L/M) = \Phi(M)$
- $\forall \sigma \in G$ **に対し、**

$$\sigma H \sigma^{-1} \leftrightsquigarrow \sigma(M)$$

- **特に、** $H \lhd G \Leftrightarrow M/K$: **Galois で、この時、**

$$G/H \simeq \mathrm{Gal}(M/K)$$

推進定理

L/K : **Galois 拡大**
M/K : **任意の体拡大 (超越でも非分離でも可)**
に対し、

- LM/M : **Galois 拡大で、**
$$\mathrm{Gal}(LM/M) \simeq \mathrm{Gal}(L/L \cap M)$$

特に、L_1, L_2 : **共に Galois 拡大の時、**

- $L_1L_2, L_1 \cap L_2$: **共に** K **上の Galois 拡大**
- $\mathrm{Gal}(L_1L_2/K)$
$$\simeq \mathrm{Gal}(L_1/K) \times_{\mathrm{Gal}(L_1 \cap L_2/K)} \mathrm{Gal}(L_2/K)$$
- $\mathrm{Gal}(L_1L_2/L_1 \cap L_2)$
$$\simeq \mathrm{Gal}(L_1/L_1 \cap L_2) \times \mathrm{Gal}(L_2/L_1 \cap L_2)$$

では、

色々な Galois 拡大と Galois 対応の例を

見ていこう