期末試験のお知らせ:

1月29日(木) 15:15 〜 16:45

9-252教室
(いつもと違うので注意)

- 体論・Galois理論を巡る諸々
  - ⋆ 本日の講義内容まで
  - ⋆ 中間試験までの内容の復習も含む
- 学生証必携

授業アンケート

教員独自の設問:

(1) 入学前、数学は好きでしたか

(2) 今は数学は好きですか

(3) 本学科の３年配当の選択科目として適切な内容だったと思いますか

数学講究発表会

- 期日: 2 月 3 日 (火)
- 時間: 9:30 〜 17:30 頃の予定
- 会場: 3-249 教室
- 途中入退場自由
- 奮って来聴を

Dedekind-Artin の方法

線型代数を前面に押し出した論理展開で
Galois 理論の基本定理の証明に向かう方法

基本定理の証明だけなら最短かも

参考: E. Artin “Galois Theory” (和訳あり)

Dedekind の補題

S : **有限集合** $= \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$
$\subset \mathrm{Aut}(L/K) \subset \mathrm{Hom}_K(L, L)$
: L-**線型空間**

と見るとき、

$\sigma_1, \dots, \sigma_n$: L **上線型独立**

系

S : **有限集合** $\subset \mathrm{Aut}(L/K)$

$\Longrightarrow [L : K] \geq \# S$

命題

G : **部分群** $\subset \mathrm{Aut}(L)$

$K := L^G$

$\Longrightarrow [L : K] \leq \#G$

Artin の定理

G ： **部分群** $\subset \mathrm{Aut}(L)$

$K := L^G$

$\Longrightarrow L/K$ ： **Galois 拡大で、** $\mathrm{Gal}(L/K) = G$

ノルム・トレース

L/K : Galois 拡大、$G = \mathrm{Gal}(L/K)$

$$Tr_{L/K} : L \longrightarrow K : \text{加法群の準同型}$$
$$x \longmapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)$$

$$N_{L/K} : L^\times \longrightarrow K^\times : \text{乗法群の準同型}$$
$$x \longmapsto \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$$

正則表現

L/K : n 次拡大

$L \simeq K^n$ (K 上の線型空間として)

$x \in L$ に対し、

$$\begin{aligned} \varphi_x : L &\longrightarrow L : K\text{-線型写像} \\ a &\longmapsto xa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : L &\longrightarrow \mathrm{End}_K(L) \simeq \mathrm{M}(n, K) \\ x &\longmapsto \varphi_x \end{aligned}$$

: K-代数の単射準同型

ノルム・トレースと正則表現

L/K : **Galois 拡大でない場合にも、**

$$Tr_{L/K}(x) = \mathrm{tr}\varphi_x$$
$$N_{L/K}(x) = \det \varphi_x$$

と定義すると、

L/K : **Galois 拡大のときには、**

先程の定義と一致

Kummer 拡大

K : 体 $\ni \zeta_n$: 1 の原始 n 乗根

L/K : n 次巡回拡大

(即ち、L/K : Galois 拡大 で

$\mathrm{Gal}(L/K)$ が n 次巡回群)

$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$ とする時、

$\Longrightarrow \exists a \in K : L = K(\sqrt[n]{a}), \sigma(\sqrt[n]{a}) = \zeta_n \sqrt[n]{a}$

特に、

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L/K) &\xrightarrow{\sim} \mu_n \\ \tau &\longmapsto \tau(\sqrt[n]{a})/\sqrt[n]{a} \end{aligned}$$

これにて

おしまい