2008年度秋期

代数学IIe

(数学科)

(担当: 角皆)

- 「代数学」$\cdots$ 群論

- 「代数学 Ie」$\cdots$ 環論・加群の理論

- 「代数学 IIe」
  - ⋆ 体論
  - ⋆ Galois 理論 $\longleftarrow$ 方程式の解法理論

- 「代数学」 $\cdots$ 群論

- 「代数学 Ie」 $\cdots$ 環論・加群の理論

- 「代数学 IIe」
  $\star$ 体論
  $\star$ Galois 理論 $\longleftarrow$ 方程式の解法理論

いきなりですが、

3 次方程式・4 次方程式の一般解法
(解の公式)

って知ってますか？

$\longrightarrow$ 方程式の解法探求の歴史

いきなりですが、

3 次方程式・4 次方程式の一般解法
(解の公式)

って知ってますか？

$\longrightarrow$ **方程式の解法探求の歴史**

今までに習った数学 (算数) を

振り返ってみよう。

(人間と数学の歴史を振り返る)

小学校:

- 自然数 (正の整数) の＋×
- −は出来ない時がある
- ÷は商と余りとを求める (整除)
- 分数を用いた÷ (正の有理数)
- 小数 (近似値・正の実数)

中学・高校:

- **正負の数の四則 (＋−×÷)**
- **文字式 (多項式) の＋−×**
- **÷は分数式 (有理式) として**
- 1 **変数の整除 (商と余り)**
- **数の−÷** $\longrightarrow$ 1 **次方程式**
- 2 **次方程式の根の公式**
  (知らなくても困らない？)
- **簡単な連立方程式**
- 3 **次以上は因数分解出来れば解ける**

大学で数学を習って

新しく出来るようになったことって

ある？

中学・高校:

- 正負の数の四則 (＋－×÷)
- 文字式 (多項式) の＋－×
- ÷は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
  (知らなくても困らない？)
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算 (余りを求める)

$\Downarrow$

Gröbner 基底

(広中-Buchberger の algorithm)

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 $\longrightarrow 1$ **変数方程式へ (変数消去)**

様々な計算機代数システムで実装されている

ここでは、

3 次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2 次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
(紀元前 2000 年頃!! 平方完成の方法)

但し、

- **問題も解法も言葉で表された**
- **係数は正の数のみ (非整数も OK)**
- **(正数の範囲の) 引き算は OK**
- **解も正の数のみ**

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。(**$a > 0, b > 0$**)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ **負の数は人間にとって考え難い?!)**

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。(**$a > 0, b > 0$**)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ **負の数は人間にとって考え難い?!)**

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。($a > 0, b > 0$)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い?!)

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「根の公式」とは:

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

参考:

- 作図問題: 定規とコンパス
- 中国: 解の近似計算 (小数)

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「**根の公式**」とは:
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

参考:

- 作図問題: 定規とコンパス
- 中国: 解の近似計算 (小数)

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「根の公式」とは:
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

参考:

- 作図問題: 定規とコンパス
- 中国: 解の近似計算 (小数)

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半
(del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
  (但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見ていこう。

(以下、暫く板書で)

3 次方程式の根の公式 (Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3 乗根は掛けて $-\dfrac{p}{3}$ となるように取る)

3 乗根の 1 組を u, v とすると、($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^{3}(X - x_i)$$

$$\begin{aligned} D(f) := &\prod_{1 \le i < j \le 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

$: f$ の**判別式 (discriminant)**

- x_1, x_2, x_3 の対称式
  $\longrightarrow$ 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$ が重根を持つ $\iff D(f) = 0$

4 次方程式の解法の発見 (16 世紀前半, Ferrari)

3 次方程式の解法から間もなく

- **難しさの違いが少ない？**
- **時代が熟していた？**
  (考察の蓄積・記号法の発達など)

(以下次回)