3 次方程式の根の公式 (Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3 乗根は掛けて $-\frac{p}{3}$ となるように取る)

3 乗根の 1 組を u, v とすると、($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^{3}(X - x_i)$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

$: f$ の**判別式 (discriminant)**

- x_1, x_2, x_3 の対称式
  $\longrightarrow$ 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$ が重根を持つ $\Longleftrightarrow D(f) = 0$

演習 1:

(1) $f(X) = X^3 + pX + q$ **の** 3 **根を** x_1, x_2, x_3 **とする。**

(a) $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$ **を** p, q **で表せ。**

(b) 根の差積の平方 (判別式)

$D(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2$ **を** p, q **で表せ。**

(2) 3 **次方程式** $X^3 - 21X + 20 = 0$ **を、**

(a) 因数分解を見付けて解け。

(b) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。

$$
\begin{cases}
s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\
s_3 = x_1x_2x_3 = -q
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
D(f) &= s_1^2 s_2^2 - 4s_1^3 s_3 - 4s_2^3 + 18s_1s_2s_3 - 27s_3^2 \\
&= -4p^3 - 27q^2
\end{aligned}
$$

Cardano の公式は次の形

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega - \omega^2)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega^2 - \omega)}}$$

$$(D = -4p^3 - 27q^2)$$

(2 次方程式と同様に、根に $\sqrt{D}$ が現れる!!)

実は、3 実根を持つ 3 次方程式を
Fontana-Cardano の方法で解くと、

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$$

となり、負数の平方根を経由する (不可避)
$\cdots$ “不還元の場合 (Casus irreducibilis)”

歴史上で、負数の平方根が扱われた最初

“存在しない” 数を形式的に扱うと、
“存在する” 実根が計算できる

$\longrightarrow$ 数式の形式的な操作の有用性

実は、3 実根を持つ 3 次方程式を
Fontana-Cardano の方法で解くと、

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$$

となり、負数の平方根を経由する (不可避)
$\cdots$ **“不還元の場合 (Casus irreducibilis)”**

歴史上で、負数の平方根が扱われた最初

“存在しない” 数を形式的に扱うと、
“存在する” 実根が計算できる

$\longrightarrow$ **数式の形式的な操作の有用性**

4 次方程式の解法の発見 (16 世紀前半, Ferrari)

3 次方程式の解法から間もなく

- 難しさの違いが少ない？
- 時代が熟していた？
  (考察の蓄積・記号法の発達など)

(以下、暫く板書で)

4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる

$$\Updownarrow$$

$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式

$\longrightarrow$ **この t を用いて解く。**

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

$: 3$ **次分解式 (解核多項式,resolvent)**

$T := 2t$ **とおいて、**

$$R(T) := -g\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

5 次以上の方程式の解法への模索

有力な方法の一つ: Tschirnhaus 変換

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n = 0$$

$$Y = X^{n-1} + b_1 X^{n-2} + \cdots + b_{n-2} X + b_{n-1}$$

の形の変換で、

解ける方程式 ($Y^n = c$ など) にならないか。

しかし、次の進展は、

3 次・4 次方程式の解法の発見から、

200 年以上も待たねばならなかった。

$\longrightarrow$ 200 **年後 (18 世紀後半): Lagrange の考察**

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析

(群論の萌芽・Galois 理論への一歩)

実は、4 次以下と 5 次以上とでは、

問題の難しさが本質的に違った

のだった。

しかし、次の進展は、
3 次・4 次方程式の解法の発見から、
200 年以上も待たねばならなかった。

$\longrightarrow$ 200 年後 (18 世紀後半): Lagrange の考察

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析
(群論の萌芽・Galois 理論への一歩)

実は、4 次以下と 5 次以上とでは、
問題の難しさが本質的に違った
のだった。