

3 次方程式の根の公式 (Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて $-\frac{p}{3}$ となるように取る)

3乗根の1組を u, v とすると、($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i)$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &\quad : f \text{ の判別式 (discriminant)} \end{aligned}$$

- x_1, x_2, x_3 の対称式
→ 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$ が重根を持つ $\iff D(f) = 0$

演習 1:

(1) $f(X) = X^3 + pX + q$ の 3 根を x_1, x_2, x_3 とする。

$$(a) \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 \end{cases} \text{ を } p, q \text{ で表せ。}$$

(b) 根の差積の平方 (判別式)

$$D(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \text{ を } p, q \text{ で表せ。}$$

(2) 3 次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

(a) 因数分解を見付けて解け。

(b) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D(f) &= s_1^2s_2^2 - 4s_1^3s_3 - 4s_2^3 + 18s_1s_2s_3 - 27s_3^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 \end{aligned}$$

Cardano の公式は次の形

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega - \omega^2)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega^2 - \omega)}} \\ (D = -4p^3 - 27q^2)$$

(2 次方程式と同様に、根に \sqrt{D} が現れる!!)

実は、3 実根を持つ 3 次方程式を
Fontana-Cardano の方法で解くと、

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$$

となり、負数の平方根を経由する (不可避)
… “不還元の場合 (Casus irreducibilis)”

歴史上で、負数の平方根が扱われた最初

“存在しない” 数を形式的に扱おうと、
“存在する” 実根が計算できる

→ 数式の形式的な操作の有用性

4 次方程式の解法の発見 (16 世紀前半, Ferrari)

3 次方程式の解法から間もなく

- 難しさの違いが少ない？
- 時代が熟していた？
(考察の蓄積・記号法の発達など)

(以下、暫く板書で)

4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式

→ この t を用いて解く。

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 (解核多項式, **resolvent**)

$T := 2t$ において、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

5 次以上の方程式の解法への模索

有力な方法の一つ: **Tschirnhaus** 変換

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

$Y = X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1}$
の形の変換で、

解ける方程式 ($Y^n = c$ など) にならないか。

しかし、次の進展は、
3次・4次方程式の解法の発見から、
200年以上も待たねばならなかった。

→ 200年後(18世紀後半): Lagrange の考察

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析
(群論の萌芽・Galois 理論への一步)

実は、4次以下と5次以上とは、
問題の難しさが本質的に違った
のだった。