

### 3 次方程式の根の公式 (Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$  の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて  $-\frac{p}{3}$  となるように取る)

3乗根の1組を  $u, v$  とすると、( $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ )

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i)$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &\quad : f \text{ の判別式 (discriminant)} \end{aligned}$$

- $x_1, x_2, x_3$  の対称式  
→ 係数 (基本対称式) で書ける

$$D(f) = -4p^3 - 27q^2$$

- $f(X)$  が重根を持つ  $\iff D(f) = 0$

## Cardano の公式は次の形

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega - \omega^2)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega^2 - \omega)}} \\ (D = -4p^3 - 27q^2)$$

2 次方程式と同様に、根に  $\sqrt{D}$  が現れる!!

→ 理由は **Galois** 理論で説明される

## 4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数  $t$  を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは  $t$  の 3 次方程式

→ この  $t$  を用いて解く。

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 (解核多項式, **resolvent**)

$T := 2t$  において、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

## 演習 2:

(1) “二重根号をはずす公式”

$$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \text{ を確かめよ}$$

(2)  $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$  について、

(a) 二重根号をはずせ

(b)  $x$  が満たす有理数係数の方程式は？

(c) その方程式を Ferrari の方法で解いてみよ

(3)  $x = \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}$  について、

(a) 無理やり二重根号をはずそうとすると？

(b)  $x$  が満たす有理数係数の方程式は？

(c) その方程式を Ferrari の方法で解いてみよ

## 5 次以上の方程式の解法への模索

有力な方法の一つ: **Tschirnhaus** 変換

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

$Y = X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1}$   
の形の変換で、

解ける方程式 ( $Y^n = c$  など) にならないか。

$$\begin{cases} X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0 \\ X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1} = Y \end{cases}$$

の解  $(x, y)$  を考える

$Y = y$  に対し、

$\exists x : (x, y)$  が解

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0 \\ X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + (b_{n-1} - y) = 0 \end{cases}$$

が共通根を持つ



$$\left\{ \begin{array}{l} f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n \\ \quad = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \\ g(X) = X^m + b_1 X^{m-1} + \cdots + b_{m-1} X + b_m \\ \quad = \prod_{j=1}^m (X - \beta_j) \end{array} \right.$$

が共通根を持つ

$$\iff R(f, g) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) = 0$$

$R(f, g)$  : 終結式 (**resultant**)

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

$$g(X) = X^m + b_1X^{m-1} + \cdots + b_m = \prod_{j=1}^m (X - \beta_j)$$

$$R(f, g) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) \quad : \text{終結式}$$

- $\alpha_i$  達・ $\beta_j$  達 それぞれについて対称式  
→  $a_i, b_j$  達の多項式で書ける
- $f, g$  から  $X$  を消去した多項式

さて、しかし、次の進展は、  
3次・4次方程式の解法の発見から、  
200年以上も待たねばならなかった。

→ 200年後(18世紀後半): Lagrange の考察

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析  
(群論の萌芽・Galois 理論への一步)

実は、4次以下と5次以上とは、  
問題の難しさが本質的に違った  
のだった。

### 3 次方程式の解法 (Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

#### 3 次方程式

$$f(X) = X^3 + pX + q = 0$$

の 3 根  $x_1, x_2, x_3$  に対し、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$

$$v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

を考えよ … “Lagrange resolvent”

( $\omega$  は 1 の原始 3 乗根、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ )

$$u = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)/3$$

$$v = (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)/3$$

## 根の置換

$$\sigma = (1\ 2\ 3) : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$$

$$\tau = (2\ 3) : x_1 \mapsto x_1, x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_2$$

に対して、

$$\sigma : \begin{cases} u \mapsto \omega^2 u \mapsto \omega u \mapsto u \\ v \mapsto \omega v \mapsto \omega^2 v \mapsto v \end{cases}$$

$$\tau : u \mapsto v \mapsto u$$

$u^3$  は、根のあらゆる置換で動かしても、  
出てくるのは  $u^3, v^3$  のみ。(軌道, orbit)

↓

$$(T - u^3)(T - v^3) = T^2 - (u^3 + v^3)T + u^3v^3$$

の係数は、根のあらゆる置換で不変(対称式)

↓

元の方程式の係数(基本対称式)で書ける筈!!

ところで、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$

$$v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

は何処から来たのか？

更に遡って

2 次方程式の解法を Lagrange 風に見てみよう。

## 2 次方程式の解法 (Lagrange 風)

$X^2 + aX + b = 0$  の 2 根を  $\alpha, \beta$  とする。

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases} \quad (\text{基本対称式})$$

これを直接解こうとしても、  
元の方程式に戻るだけ

$\alpha - \beta$  は対称式ではないが、  
 $\alpha, \beta$  を入換えると  $(-1)$  倍

→  $(\alpha - \beta)^2$  は対称式 →  $a, b$  で表せる!!



$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 - 4b : \text{判别式}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha - \beta = \pm\sqrt{a^2 - 4b} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \alpha, \beta = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

3 次方程式に戻って、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$

$$v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

は、 $\sigma = (1\ 2\ 3) : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$  で  $\omega^2$  倍

→ 固有値  $\omega^2$  の固有ベクトル

始めから探すには、固有値問題を解けば良い。  
(対称群の線型表現)

うまくいった理由の要点:

$u^3$  は、根のあらゆる置換で動かしても、  
出てくるのは  $u^3, v^3$  のみ。(軌道, orbit)

$u^3, v^3$  が “程々に” 対称的

→ 方程式を解く途中の手掛かりとなった。

では、4 次方程式

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

の Ferrari の解法がうまくいった理由は？

- 3 次分解式

$$R(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

の根の正体は？

- “程々に対称的” な根の組合せは？

## Lagrange の定理(の元々の形)

$n$  次多項式の根から作った有理式  $u$  に対し、  
全ての根の置換  $n!$  個のうち  
 $u$  を不変にする置換が  $m$  個ならば、

$$m \mid n!$$

であり、 $u$  は根の置換により

$$d := \frac{n!}{m} \text{ 個の異なる値を取る。}$$

更にこのとき、  
 $u$  は係数から作られる  $d$  次多項式の根である。