

## 体の拡大

$L/K$ : 体の拡大に対し、

- $L$  : 自然に  $K$  上の線型空間
- $[L : K] := \dim_K L$  :  $L/K$  の**拡大次数**  
... 拡大の大きさを計る量

## 体の拡大

$L/K$ : 体の拡大に対し、

- $x \in L$  が  $K$  上代数的 (**algebraic**)  
 $\iff \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) = 0$
- $x \in L$  が  $K$  上超越的 (**transcendental**)  
 $\iff \forall f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) \neq 0$
- $L/K$  : 代数的 (**algebraic**)  
 $\iff \forall x \in L : K$  上代数的
- $L/K$  : 超越的 (**transcendental**)  
 $\iff \exists x \in L : K$  上超越的

$x \in L$  に対し、

$$\begin{aligned}\varphi_x : K[X] &\longrightarrow L: \text{環準同型} \\ g &\longmapsto g(x)\end{aligned}$$

$\mathfrak{p} := \text{Ker}\varphi_x$  と置くと、

$$\begin{aligned}x : K \text{ 上代数的} &\iff \mathfrak{p} \neq \{0\} \\ &\iff \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : \mathfrak{p} = (f)\end{aligned}$$

この時、

$$\begin{aligned}f(X) &=: \text{Irr}(x/K; X) \in K[X] \\ &: x \text{ の } K \text{ 上の最小多項式という}\end{aligned}$$

$x \in L : K$  上代数的のとき

$$K[X]/(f) \hookrightarrow K[x] = K(x) \subset L$$

$$[K(x) : K] = \deg f$$