体の拡大

L/K: 体の拡大に対し、

- L : 自然に K 上の線型空間
- $[L : K] := \dim_K L$: L/K の**拡大次数**
  $\cdots$ 拡大の大きさを計る量

体の拡大

L/K: 体の拡大に対し、

- $x \in L$ が K 上**代数的 (algebraic)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) = 0$
- $x \in L$ が K 上**超越的 (transcendental)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) \neq 0$
- L/K : **代数的 (algebraic)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall x \in L$: K 上代数的
- L/K : **超越的 (transcendental)**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists x \in L$: K 上超越的

$x \in L$ **に対し、**

$$\begin{aligned} \varphi_x : K[X] &\longrightarrow L\text{: 環準同型} \\ g &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

$\mathfrak{p} := \mathrm{Ker}\varphi_x$ **と置くと、**

$$\begin{aligned} x\text{ : } K\text{ 上代数的} &\iff \mathfrak{p} \neq \{0\} \\ &\iff \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : \mathfrak{p} = (f) \end{aligned}$$

この時、

$f(X) =: \mathrm{Irr}(x/K; X) \in K[X]$

: x **の** K **上の最小多項式という**

$x \in L$：K 上代数的のとき

$$K[X]/(f) \hookrightarrow K[x] = K(x) \subset L$$

$$\boxed{[K(x) : K] = \deg f}$$