体の代数拡大

- L/K: 体の拡大に対し、
  $[L:K] := \dim_K L$: L/K の**拡大次数**

- $L \supset M \supset K$: 体の拡大の塔に対し、
$$[L:K] = [L:M][M:K]$$
(拡大次数の連鎖律)

- 特に、
  L/K: 有限次 $\iff$ $L/M, M/K$: 共に有限次

体の代数拡大

- $x \in L$ が K 上**代数的** (**algebraic**)
  $\overset{\leftarrow}{\iff} \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) = 0$

- L/K : **代数的** (**algebraic**)
  $\overset{\leftarrow}{\iff} \forall x \in L$: K 上代数的

- L/K : 有限次 $\Longrightarrow L/K$: 代数的

体の代数拡大

$x \in L$ に対し、

$$\varphi_x : K[X] \longrightarrow L \text{: 環準同型}$$
$$g \longmapsto g(x)$$

$\mathfrak{p} := \mathrm{Ker}\varphi_x$ と置くと、

x : K 上代数的 $\iff \mathfrak{p} \neq \{0\}$

$$\iff \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : \mathfrak{p} = (f)$$

この時、

$f(X) =: \mathrm{Irr}(x/K; X) \in K[X]$

: x の K 上の**最小多項式**という

$x \in L$：K 上代数的

$$f(X) = \mathrm{Irr}(x/K; X) \in K[X]$$

：x の K 上の最小多項式

のとき、

$$K[X]/(f) \hookrightarrow K[x] = K(x) \subset L$$

$$\boxed{[K(x) : K] = \deg f}$$

- x：K **上代数的** $\Longleftrightarrow$ $K(x)/K$ ：**代数的**

- $L \supset M \supset K$: **体の拡大の塔に対し、**
  $\star$ L/K:**代数的** $\Longleftrightarrow$ $L/M, M/K$:**共に代数的**
  $\star$ M/K:**代数的のとき、**
  $x \in L$ ：M **上代数的** $\Longleftrightarrow$ K **上代数的**

- x, y ：K **上代数的**
  $\Longrightarrow$ $x \pm y, xy, x/y$ ：K **上代数的**

- $\{x \in L | x : K$ **上代数的**$\}$ ：**体を成す**
  ：L **内での** K **の代数閉包**

根体

L/K：**体の拡大**

$f(X) \in K[X]$：K **上既約な多項式**

$x \in L$：f **の根に対し、**

$K(x)$ **はどの根を取っても互いに** K **上同型**

$$K(x) \simeq K[X]/(f)$$

：K **上の** f **の根体**

最小分解体

f の根体 $K(x)$ に
f の全ての根が含まれるとは限らない

- L/K が f の K 上の分解体
  $\overset{\leftharpoondown}{\Longleftrightarrow}$ $L[X]$ 内で $f(X)$ が 1 次式の積に分解
  $$f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$$
- $\mathrm{Spl}(f/K) := K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
  : f の K 上の最小分解体

ここまでは注意深く、K の拡大体 L を考えて、
「L 内に f の根があるとき」
と言ってきた。

では、単に体 K と $f \in K[X]$ とがあるとき、

f の根を含む体を
いつでも考えることが出来るのか？

$\longrightarrow$ f の最小分解体を考えれば良い
(有限回の根添加で構成できる)

ここまでは注意深く、K の拡大体 L を考えて、
「L 内に f の根があるとき」
と言ってきた。

では、単に体 K と $f \in K[X]$ とがあるとき、

f の根を含む体を
いつでも考えることが出来るのか？

$\longrightarrow$ f の最小分解体を考えれば良い
(有限回の根添加で構成できる)

ここまでは注意深く、K の拡大体 L を考えて、
「L 内に f の根があるとき」
と言ってきた。

では、単に体 K と $f \in K[X]$ とがあるとき、

f の根を含む体を
いつでも考えることが出来るのか？

$\longrightarrow$ f の最小分解体を考えれば良い
(有限回の根添加で構成できる)

しかし、f を考えるごとに一々作るのでは不便。

Q に対して C を考えておくように、

全ての $f \in K[X]$ が根を持つような
大きな体を予め考えて、

常にその中で考えている、
と思っておくと便利ではないか。

- そのような都合の良い体が存在するのか？
(例えば、$F_p = Z/pZ$ に対しても ?)
- 取り方が色々あるのではないか？

しかし、f を考えるごとに一々作るのでは不便。

Q に対して C を考えておくように、

全ての $f \in K[X]$ が根を持つような
大きな体を予め考えて、

常にその中で考えている、
と思っておくと便利ではないか。

- そのような都合の良い体が存在するのか？
(例えば、$F_p = Z/pZ$ に対しても ?)
- 取り方が色々あるのではないか？

代数閉体: 次の同値な条件を満たす体 K のこと

- K の代数拡大は K 自身のみ
- $K[X]$ の既約多項式は 1 次式のみ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で 1 次式の積に分解
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で 1 次因子を持つ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内に重複を数えて $(\deg f)$ 個の根を持つ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で少なくとも 1 つ根を持つ

代数閉体

K：体 $\subset \Omega$：代数閉体のとき、

- Ω 内での K の代数閉包は代数閉体
- $\forall K(x)/K$：代数的単拡大に対し、
$\exists \iota : K(x) \hookrightarrow \Omega$：$K$ 上の埋込
- $\forall L/K$：代数拡大に対し、
$\exists \iota : L \hookrightarrow \Omega$：$K$ 上の埋込

実は、ここには微妙な所があって $\cdots$

代数閉体

K：体 $\subset \Omega$：代数閉体のとき、

- Ω 内での K の代数閉包は代数閉体
- $\forall K(x)/K$：代数的単拡大に対し、
  $\exists\iota : K(x) \hookrightarrow \Omega$：$K$ 上の埋込
- $\forall L/K$：代数拡大に対し、
  $\exists\iota : L \hookrightarrow \Omega$：$K$ 上の埋込

実は、ここには微妙な所があって $\cdots$

基本的には、
代数的単拡大に埋込を延長する操作を
繰返せばよいのだが、

L/K **: 無限生成 (無限次) 代数拡大の時には**

何度繰り返しても L **全体にはならない。**

($[L:K]=\infty$**,** x **:** K **上代数的**
$\Longrightarrow [L:K(x)]=\infty$**)**

この操作をやり遂げて、
K **上の埋込** $L \hookrightarrow \Omega$ **を**
作り終えることが出来るのか ?

基本的には、
代数的単拡大に埋込を延長する操作を
繰返せばよいのだが、

L/K **：無限生成 (無限次) 代数拡大の時には**

何度繰り返しても L **全体にはならない。**

($[L:K]=\infty$**,** x **：** K **上代数的**
$\Longrightarrow [L:K(x)]=\infty$**)**

この操作をやり遂げて、
K **上の埋込** $L \hookrightarrow \Omega$ **を**
作り終えることが出来るのか？

L/K : **有限生成 (有限次) 代数拡大なら大丈夫**

一般の (無限次) の場合には選択公理が必要

選択公理と同値な命題:

- Zorn の補題
- 整列可能定理 (Zermelo)
- 線型空間の基底の存在
- 環の極大 ideal の存在
- Tikhonov の積定理　　など

L/K : **有限生成 (有限次) 代数拡大なら大丈夫**

一般の (無限次) の場合には選択公理が必要

選択公理と同値な命題:

- **Zorn の補題**
- **整列可能定理 (Zermelo)**
- **線型空間の基底の存在**
- **環の極大 ideal の存在**
- **Tikhonov の積定理**　　　**など**

選択公理 (又はそれと同値な命題) を認めれば、

K **: 体** $\subset \Omega$ **: 代数閉体のとき、**

$\forall L/K$ **: 代数拡大に対し、**

$\exists \iota : L \hookrightarrow \Omega$ **:** K **上の埋込**

は大丈夫。特に、

L_1, L_2**:** K **上代数的な代数閉体 (代数閉包) は互いに** K**-同型**

$\longrightarrow$ **代数閉包は存在すれば** K**-同型を除いて一意的 (通常** $\overline{K}$ **と書く)**

選択公理 (又はそれと同値な命題) を認めれば、

K：体 $\subset \Omega$：代数閉体のとき、

$\forall L/K$：代数拡大に対し、
$\exists \iota : L \hookrightarrow \Omega$：$K$ 上の埋込

は大丈夫。特に、

L_1, L_2: K 上代数的な代数閉体 (代数閉包) は
互いに K-同型

$\longrightarrow$ 代数閉包は存在すれば
K-同型を除いて一意的
(通常 $\overline{K}$ と書く)

代数閉包の存在 (構成)

K 上の全ての多項式 $f \in K[X]$ の
全ての根を添加せよ

(添加し終えるには選択公理が必要)

選択公理の下に、

定理: 任意の体に対し、代数閉包が存在する

以下、通常は、

体 K に対し、

(K-同型を除いて一意に存在する) 代数閉包を

予め 1 つ取って固定して $\overline{K}$ と書き、

全ての代数拡大 L/K は $\overline{K}$ の部分体と見る。