分離性

K：体 $\subset \overline{K}$

- $x \in \overline{K}$： K 上**分離的** (**separable**)
  $\overset{\leftarrow}{\iff} f(X) := \mathrm{Irr}(x/K; X)$ が重根なし
- L/K：**分離拡大** $\overset{\leftarrow}{\iff} \forall x \in L$： K 上分離的

- x： K 上分離的
  $\iff \#\mathrm{Emb}_K(K(x), \overline{K}) = [K(x) : K]$
  $\iff K(x)/K$ ：分離的
- $K \subset M \subset L \subset \overline{K}$ の時、
  L/K: 分離的 $\iff L/M, M/K$: 共に分離的

標数 (characteristic)

$$\exists ! \iota : \boldsymbol{Z} \longrightarrow K : \text{環準同型}$$
$$1 \longmapsto 1_K$$

$\mathrm{Ker} f =: (p)$ (p は素数または 0)

$\mathrm{ch} K := p$: 体 K の**標数**

(1_K を幾つ足したら 0_K になるかという個数)

分離性

- $\mathrm{ch} K = 0$ なら必ず分離的
- $\mathrm{ch} K = p > 0$ の時、
  x：K 上非分離的 (inseparable)
  $\iff \exists g(X) \in K[x] : f(X) = g(X^p)$
  $\iff \exists h(X) \in \overline{K}[x] : f(X) = h(X)^p$
  (従って、重複度は p の倍数)
- $\mathrm{ch} K = p > 0$ でも、

$$\begin{aligned} \varphi_p : K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$
: Frobenius 同型

が全射ならば、K は非分離拡大を持たない

Frobenius 同型

$\mathrm{ch}K = p > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \varphi_p : K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

: 体の (中への) 同型

"**Frobenius 同型**"

即ち、

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

(正標数に特有の現象)

有限次代数拡大の基本的な不等式 (再掲)

L/K: 有限次 (代数) 拡大

$K \subset L \subset \Omega$: 代数閉体

$$\#\mathrm{Aut}(L/K) \leq \#\mathrm{Emb}_K(L, \Omega) \leq [L : K]$$

左の等号 $\iff L/K$: 正規

右の等号 $\iff L/K$: 分離

正規拡大も色々な意味で良い拡大であったが、

分離拡大も色々な意味で扱い易い拡大である。

特に、次が成り立つ。

- 有限次分離拡大は単拡大

実際には更に精密に $\cdots$ (以下、黒板で)

有限体

$\boldsymbol{F}_p := \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$: 標数 $p > 0$ の素体

有限体の位数は $q = p^r$ に限る ($\boldsymbol{F}_p$ の r 次拡大)

逆に $q = p^r$ に対し、位数 q の有限体が
(同型を除いて／固定した代数閉体内に)
一意に存在 ($=: \boldsymbol{F}_q$)

$$\boldsymbol{F}_q = \{x \in \overline{\boldsymbol{F}_p} \mid x^q = x\}$$

$\boldsymbol{F}_q^\times$ は位数 $(q-1)$ の巡回群