

体の拡大の理論としての Galois 理論

体拡大 L/K の様子を、

自己同型群 $\text{Aut}(L/K)$ で統制する

Galois 理論の基本定理

||

中間体と部分群との対応

有限次代数拡大の基本的な不等式 (再掲)

L/K : 有限次 (代数) 拡大

$K \subset L \subset \Omega$: 代数閉体

$$\#\text{Aut}(L/K) \leq \#\text{Emb}_K(L, \Omega) \leq [L : K]$$

左の等号 $\iff L/K$: 正規

右の等号 $\iff L/K$: 分離

$\text{Aut}(L/K)$ が望む限り大きくなるのは、
 L/K が正規かつ分離的のとき

体の拡大の理論としての Galois 理論

“Galois 拡大” とは、

“ $\text{Aut}(L/K)$ が充分大きく、
体拡大 L/K を統制できる拡大”

実際の所、

L/K が正規かつ分離的、

即ち、 $\#\text{Aut}(L/K) = [L : K]$ であることが、

Galois 理論 (中間体と部分群との対応)
が機能するのに重要

体の拡大の理論としての Galois 理論

L/K : 体の拡大

$$G := \text{Aut}(L/K) = \{\sigma \in \text{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \text{id}\}$$

- $H \subset G$: 部分群に対し、
 $L^H := \{x \in L \mid \forall \sigma \in H : \sigma(x) = x\}$
: H の**固定体 (fixed field)**
- $M : L/K$ の中間体に対し、
 $\text{Aut}(L/M) = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M : \sigma(x) = x\}$
: L の M 上の**自己同型群**

体の拡大の理論としての Galois 理論

自明に

$$\text{Aut}(L/L^H) \supset H, \quad L^{\text{Aut}(L/M)} \supset M$$

ここで = が成り立つか？

一般には成り立たないが、**Galois 拡大**なら OK

体の有限次拡大 L/K が **Galois 拡大**

\Leftrightarrow

$$L^{\text{Aut}(L/K)} = K$$

\Leftrightarrow

$$\#\text{Aut}(L/K) = [L : K]$$

\Leftrightarrow

L/K : 正規拡大 かつ 分離拡大

この時、 $\text{Aut}(L/K) = \text{Gal}(L/K)$ と書き、
 L/K の **Galois 群** と呼ぶ。

Galois 理論の基本定理

L/K : **Galois 拡大**、 $G := \text{Gal}(L/K)$: **Galois 群**

$\mathcal{H}_G := \{H \mid G \text{ の部分群}\}$

$\mathcal{M}_{L/K} := \{M \mid L/K \text{ の中間体}\}$

$$\begin{array}{ccc} & \Phi & \\ & M \longmapsto & \text{Aut}(L/M) \\ & \longrightarrow & \\ \mathcal{M}_{L/K} & & \mathcal{H}_G \\ & \longleftarrow & \\ & L^H \longleftarrow & H \\ & \Psi & \end{array}$$

Galois 理論の基本定理

- Φ, Ψ : 共に全単射で、互いに逆写像
($\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{H}_G}, \Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathcal{M}_{L/K}}$)
- Φ, Ψ : 共に包含に関して順序逆同型
($H_i \rightsquigarrow M_i$ のとき、 $H_1 \subset H_2 \Leftrightarrow M_1 \supset M_2$)

“中間体と部分群とが一対一対応”

Galois 対応
(Galois correspondence)

Galois 理論の基本定理

- $H_i \rightsquigarrow M_i$ のとき、

$$H_1 \cap H_2 \rightsquigarrow M_1 M_2$$

$$\langle H_1, H_2 \rangle \rightsquigarrow M_1 \cap M_2$$

- $M \in \mathcal{M}_{L/K}$ に対し、
 L/M : **Galois** で、 $\text{Gal}(L/M) = \Phi(M)$

- $\forall \sigma \in G$ に対し、
$$\sigma H \sigma^{-1} \rightsquigarrow \sigma(M)$$

- 特に、 $H \triangleleft G \Leftrightarrow M/K$: **Galois** で、この時、
 $G/H \simeq \text{Gal}(M/K)$

推進定理

L/K : **Galois** 拡大

M/K : 任意の体拡大 (超越でも非分離でも可)
に対し、

- LM/M : **Galois** 拡大で、
$$\text{Gal}(LM/M) \simeq \text{Gal}(L/L \cap M)$$

特に、 L_1, L_2 : 共に **Galois** 拡大の時、

- $L_1L_2, L_1 \cap L_2$: 共に K 上の **Galois** 拡大
- $\text{Gal}(L_1L_2/K)$
$$\simeq \text{Gal}(L_1/K) \times_{\text{Gal}(L_1 \cap L_2/K)} \text{Gal}(L_2/K)$$
- $\text{Gal}(L_1L_2/L_1 \cap L_2)$
$$\simeq \text{Gal}(L_1/L_1 \cap L_2) \times \text{Gal}(L_2/L_1 \cap L_2)$$

それでは、

佳いお年を