# 計算の理論

命令の実行 (= 「計算」) とは、

レジスタまたは主記憶の
現在の値 (状態) に従って、

その値を変更 (書込) すること

であった。

プログラム内蔵方式 (von Neumann 型) では、プログラム・データを区別なくメモリ上に置いていたが、やはり本質的に違うもの。

- プログラム: 一つの問題では固定
- データ: 可変な入力

$$\Downarrow$$

どんな (有効な) データ (入力) が来ても、所定の出力を返すことが要請される。

| |
|---|
| **或る問題の「計算が可能」** |
| $\Updownarrow$ |
| **その計算を行なうプログラムが存在** |

$$\Downarrow$$

**計算機の機能 ( $=$ 「計算」のモデル)**
**を決めて議論する**

**ここでは、代表的な「計算のモデル」を**
**幾つか紹介する。**

**入力 (データ)**

$\Downarrow$

$\boxed{\textbf{プログラム}}$

$\Downarrow$

**出力・動作**

**原理・理論を考える際には、**
**出力は最も単純に「$0$ か $1$ か」とする。**

- $0$： **拒否 (reject)**
- $1$： **受理 (accept)**

**入力 (データ)**

$\Downarrow$

$\boxed{\textbf{プログラム}}$

$\Downarrow$

**出力・動作**

**原理・理論を考える際には、**
**出力は最も単純に「$0$ か $1$ か」とする。**

- $0$ ： **拒否 (reject)**
- $1$ ： **受理 (accept)**

**入力 (データ)**

⇓

$\boxed{\text{プログラム}}$

⇓

**受理か拒否か**

**解くべき「問題」：入力を受理する条件**

## 「問題」の例

**入力の範囲: 文字 $a, b$ から成る文字列**

- $a$ と $b$ との個数が同じ
- $a$ が幾つか続いた後に
  $b$ が幾つか続いたもの
- $a$ で始まり $a, b$ が交互に並んで $b$ で終わる
- 同じ文字列 $2$ 回の繰返しから成る
- 回文 (palindrome)

などなど

**それぞれの「問題」に対し、**
**定められた計算モデルで、**
**受理／拒否判定が可能 (問題が解ける) か ?**

受理される文字列が
「文法的に正しい」文字列だと思えば、

「問題」とは「文法 (言語)」である。

「文法的に正しい」かどうかの判定
・・・「構文解析」

**それぞれの「問題」に対し、**
**定められた計算モデルで、**
**受理／拒否判定が可能 (問題が解ける) か ?**

**受理される文字列が**
**「文法的に正しい」文字列だと思えば、**

**「問題」とは「文法 (言語)」である。**

「文法的に正しい」かどうかの判定
· · · 「構文解析」

それぞれの「問題」に対し、
定められた計算モデルで、
受理／拒否判定が可能 (問題が解ける) か？

受理される文字列が
「文法的に正しい」文字列だと思えば、

「問題」とは「文法 (言語)」である。

「文法的に正しい」かどうかの判定
・・・「構文解析」

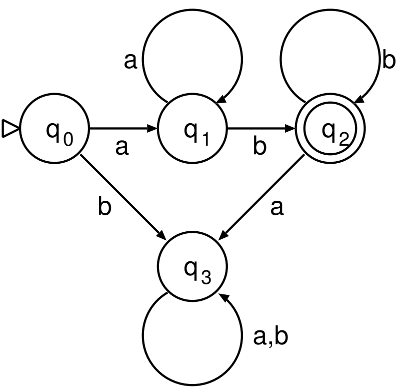
## 代表的な計算モデル

- 有限オートマトン (有限状態機械)
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

# 代表的な計算モデル

- 有限オートマトン (有限状態機械)
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

# 有限オートマトンの例 (状態遷移図による表示)



# 有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- $Q$ : 有限集合 $\cdots$ **状態**の集合
- $\Sigma$ : 有限集合 $\cdots$ 入力文字の集合
  "**alphabet**"
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ : **遷移関数**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態**の集合

## 先の例では、

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to \Sigma$ :

| | $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $q_1$ | $q_1$ | $q_3$ | $q_3$ |
| $b$ | $q_3$ | $q_2$ | $q_2$ | $q_3$ |

- $s = q_0 \in Q$
- $F = \{q_2\} \subset Q$

$\Sigma$ : **入力文字の有限集合** $\cdots$ **alphabet**

**入力は** $\Sigma$ **の元の有限列 (語)**

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n \ (a_i \in \Sigma)$$

**その全体** $\Sigma^*$

$$\Sigma^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n \qquad (\Sigma^0 = \{\varepsilon\} : \text{空列})$$

**言語 :** $\Sigma^*$ **の部分集合**

**言語** $A \subset \Sigma^*$ **に属する語** $w \in A$

$\cdots$ **言語** $A$ **に於いて "文法的に正しい"**

**$\Sigma$：入力文字の有限集合** $\cdots$ **alphabet**

**入力は $\Sigma$ の元の有限列 (語)**

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n \quad (a_i \in \Sigma)$$

**その全体 $\Sigma^*$**

$$\Sigma^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n \qquad (\Sigma^0 = \{\varepsilon\} : \text{空列})$$

**言語：$\Sigma^*$ の部分集合**

**言語 $A \subset \Sigma^*$ に属する語 $w \in A$**

$\cdots$ **言語 $A$ に於いて “文法的に正しい”**

**有限オートマトン** $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **が**
**語** $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ **を受理する**

$$\Updownarrow$$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$ :

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$ **:** $M$ **が受理する語の全体**
$\cdots$ $M$ **が認識する言語**

$M$ **は言語** $L(M)$ **の "文法" で、**
$M$ **が受理する語は "文法的に正しい"**

**有限オートマトン** $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **が**
**語** $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ **を受理する**

$$\Updownarrow$$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$ :

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$ **:** $M$ **が受理する語の全体**
$\cdots$ $M$ **が認識する言語**

$M$ **は言語** $L(M)$ **の "文法" で、**
$M$ **が受理する語は "文法的に正しい"**

# 有限オートマトンでの計算可能性問題

- **言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、**
  **$A$ を認識する有限オートマトン $M$**
  **が存在するか？**

- **有限オートマトンによって**
  **認識可能な言語はどのようなものか？**

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

# 有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  $A$ を認識する有限オートマトン $M$
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

## 演習問題:

$\Sigma = \{a, b\}$ とする。

次の言語を認識する有限オートマトンを構成し、状態遷移図で表せ。

**(1)** $A = \{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$
**(**$a$ **が偶数個 (** $0$ **個も可) 続いた後に、$b$ が奇数個続く)**

**(2)** $B = \{vabbaaw | v, w \in \Sigma^*\}$
**(部分列として** $abbaa$ **を含む)**