計算の理論

命令の実行 (＝「計算」) とは、

レジスタまたは主記憶の
現在の値 (状態) に従って、

その値を変更 (書込) すること

であった。

プログラム内蔵方式 (von Neumann 型) では、プログラム・データを区別なくメモリ上に置いていたが、やはり本質的に違うもの。

- **プログラム: 一つの問題では固定**
- **データ: 可変な入力**

どんな (有効な) データ (入力) が来ても、
所定の出力を返すことが要請される。

或る問題の「計算が可能」

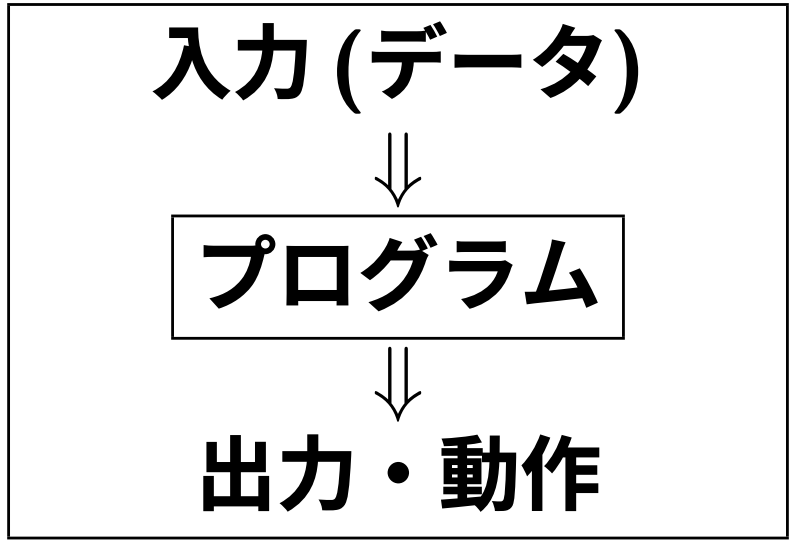
$\Updownarrow$

その計算を行なうプログラムが存在

$\Downarrow$

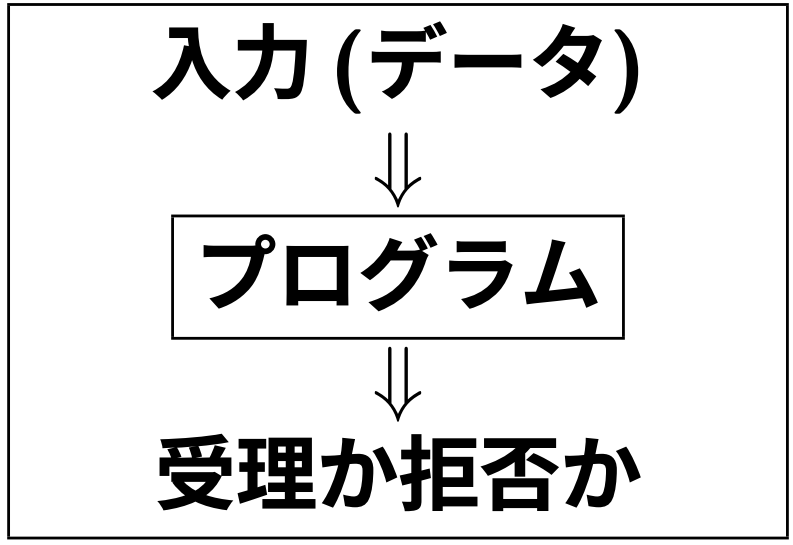
計算機の機能 (＝ 「計算」のモデル)
を決めて議論する

ここでは、代表的な「計算のモデル」を
幾つか紹介する。



原理・理論を考える際には、
出力は最も単純に「0 か 1 か」とする。

- 0：**拒否 (reject)**
- 1：**受理 (accept)**



解くべき「問題」: 入力を受理する条件

「問題」の例

入力の範囲: 文字 a, b から成る文字列

- **a と b との個数が同じ**
- **a が幾つか続いた後に b が幾つか続いたもの**
- **a で始まり a, b が交互に並んで b で終わる**
- **同じ文字列 2 回の繰返しから成る**
- **回文 (palindrome)**

などなど

それぞれの「問題」に対し、
定められた計算モデルで、
受理／拒否判定が可能 (問題が解ける) か ？

受理される文字列が
「文法的に正しい」文字列だと思えば、

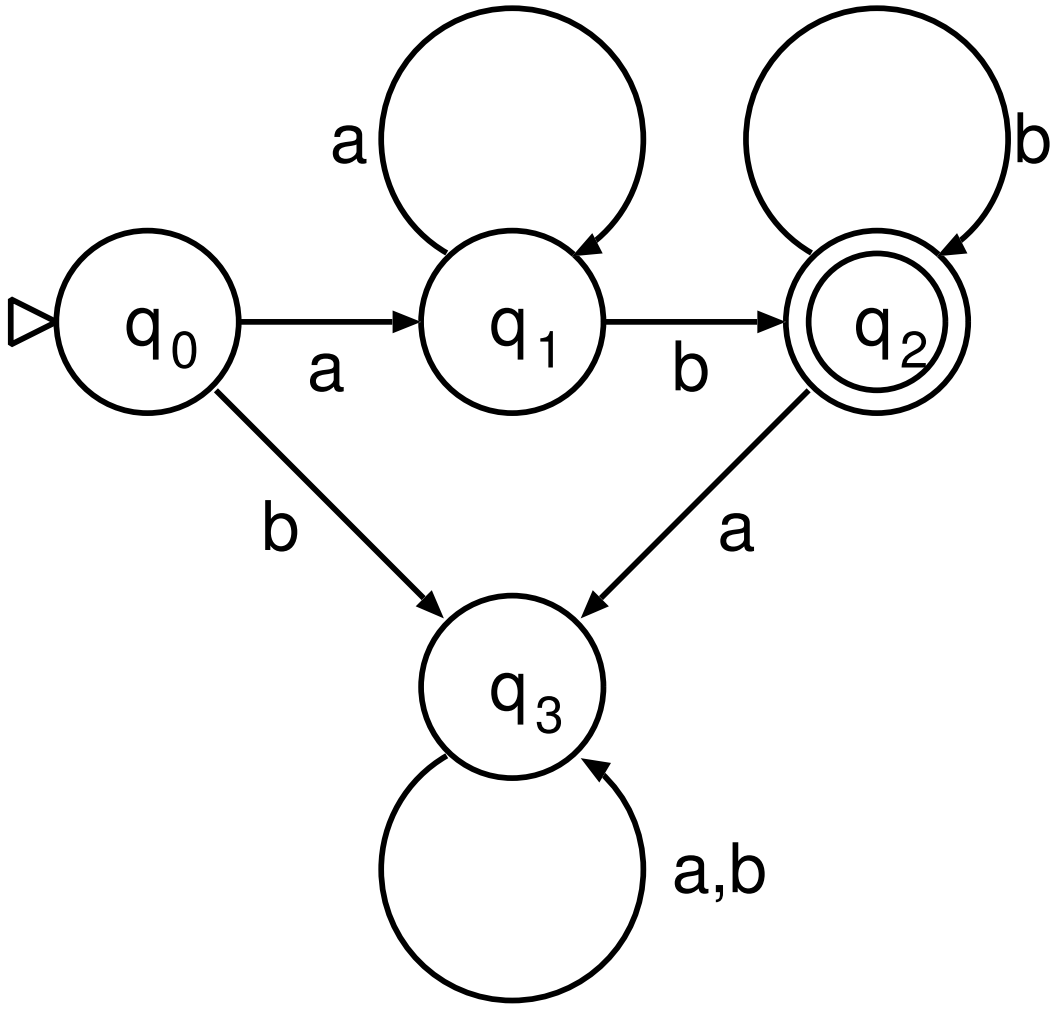
「問題」とは「文法 (言語)」である。

「文法的に正しい」かどうかの判定
. . . 「構文解析」

代表的な計算モデル

- **有限オートマトン (有限状態機械)**
- **プッシュダウンオートマトン**
- **チューリングマシン**

有限オートマトンの例 (状態遷移図による表示)



有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ：有限集合 $\cdots$ 入力文字の集合
  “alphabet”
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$：遷移関数
- $s \in Q \cdots$ 初期状態
- $F \subset Q \cdots$ 受理状態の集合

先の例では、

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to \Sigma$:

	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_3	q_2	q_2	q_3

- $s = q_0 \in Q$
- $F = \{q_2\} \subset Q$

Σ : **入力文字の有限集合** $\cdots$ **alphabet**

入力は Σ **の元の有限列 (語)**

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n \ (a_i \in \Sigma)$$

その全体 Σ^*

$$\Sigma^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n \qquad (\Sigma^0 = \{\varepsilon\} : \text{空列})$$

言語 : Σ^* **の部分集合**

言語 $A \subset \Sigma^*$ **に属する語** $w \in A$

$\cdots$ **言語** A **に於いて “文法的に正しい”**

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **が**
語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ **を受理する**

$$\Updownarrow$$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

$L(M)$: M **が受理する語の全体**
$\cdots$ M **が認識する言語**

M **は言語** $L(M)$ **の “文法” で、**
M **が受理する語は “文法的に正しい”**

演習問題:

$\Sigma = \{a, b\}$ **とする。**

次の言語を認識する有限オートマトンを構成し、状態遷移図で表せ。

(1) $A = \{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$
(a **が偶数個 (** 0 **個も可) 続いた後に、**
b **が奇数個続く)**

(2) $B = \{vabbaaw | v, w \in \Sigma^*\}$
(部分列として $abbaa$ **を含む)**

ちょっとしたコツ (tips):

「後に続く文字列が何だったら受理か」

が全く同じ状態は一つの状態にまとめられる。

これが違う状態はまとめられない。
(違う状態として用意する必要あり)

有限オートマトンでの計算可能性問題

- **言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、**
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- **有限オートマトンによって**
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

語の演算

語 $v = a_1 \cdots a_k, w = b_1 \cdots b_l \in \Sigma^*$ **に対し**

$$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

：連結・連接 (concatnation)

連接演算により Σ^* **は単位的自由半群を成す**

$$S = (S, \cdot) \text{：半群}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cdot : S \times S \longrightarrow S \text{：二項演算で結合律を満たす}$$

正規演算

言語 $A, B \subset \Sigma^*$ **に対し、**

- $A \cup B := \{w | w \in A$ **または** $w \in B\}$
  ：和集合演算
- $AB = A \circ B := \{vw | v \in A, w \in B\}$
  ：連結 (連接) 演算
- $A^* := \{w_1 w_2 \cdots w_n | n \geq 0, w_i \in A\}$
  ：star 演算

(言語全体の集合 $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ **上の演算)**

正規表現

- 各 alphabet $a \in \Sigma$ は正規表現
- 空列 ε は正規表現
- 空集合 $\emptyset$ は正規表現
- 正規表現 R, S に対し
  $(R \cup S)$ は正規表現 ($(R|S)$ とも書く)
- 正規表現 R, S に対し
  $(R \circ S)$ は正規表現 ((RS) とも書く)
- 正規表現 R に対し R^* は正規表現
- 以上のものだけが正規表現

$\cdots$ 帰納的導出による定義

正規表現 R に対し、言語 $L(R)$ を次で定める。

- $L(a) = \{a\}$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

正規表現で表される言語 $\cdots$ 正規言語

定理:

L : **正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い。

. . . 非決定性有限オートマトン

非決定性 ··· **あてずっぽう有り**

状態の遷移先を一意に決めない
(幾つかあって分岐していく)

$\longrightarrow$ **どれかが受理すれば OK!!**

どの道を辿れば良いか知っていて、
受理が検証出来れば良い、

と考えることも出来る。

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ：有限集合 $\cdots$ alphabet
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$：遷移関数
  $\cdots$ 可能な遷移先全体の集合
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 w を受理する

$$\Updownarrow$$

$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : w = a_1 a_2 \cdots a_n$
$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q :$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

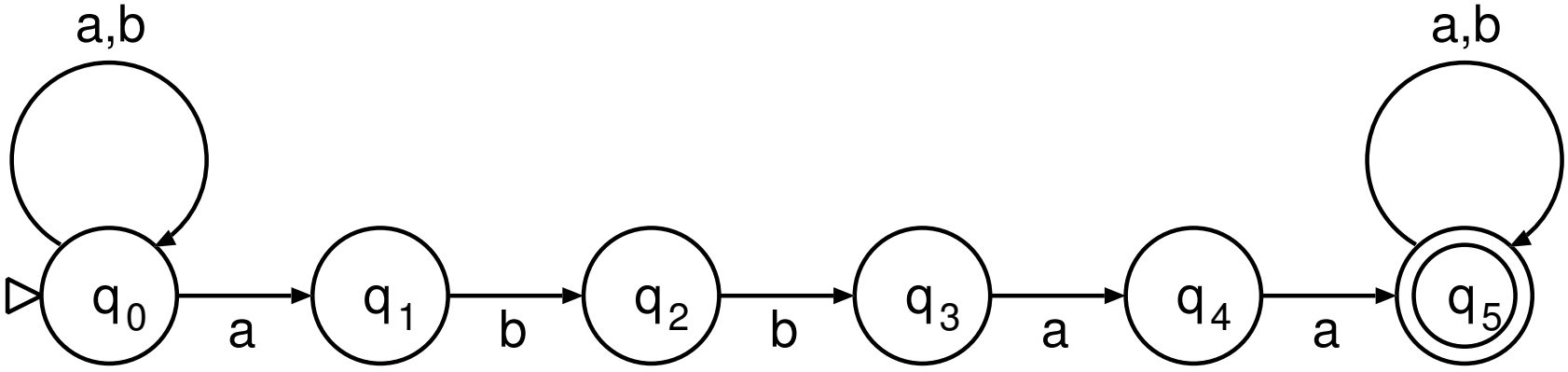
$L(M)$: M **が受理する語の全体**

$\cdots$ M **が認識する言語**

- $r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon)$ **とは、**
  「入力を読まずに
  状態 r_{i-1} **から状態** r_i **に移って良い」**
  ということ

- $\delta(r_{i-1}, a_i) = \emptyset$ **(矢印が出ていない)**
  ということもある
  $\longrightarrow$ **受理されない分岐の**
  行き止まりに入ってしまった
  $\longrightarrow$ **他の分岐が生きていれば問題無し**

非決定性有限オートマトンの例
(状態遷移図による表示)



定理:

L **が或る (決定性) 有限オートマトンで認識される**

$\Updownarrow$

L **が或る非決定性有限オートマトンで認識される**

非決定性有限オートマトン M **に対し、** $L(M)$ **を認識する決定性有限オートマトン** M' **が構成できる**

定理:

L : **正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

定理:

L : **正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る非決定性有限オートマトンで認識される**

正規言語:

- $L(a) = \{a\}$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

言語 A, B を認識する
非決定性有限オートマトンから、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する
非決定性有限オートマトンが
構成できれば良い。(それは比較的容易)

$A \cup B$ を認識する
非決定性有限オートマトンの構成