授業アンケート (数学科「応用数学 I」)

「教員独自の設問」:

(1) 数学科の他の情報系科目との連携は
適切だったと思いますか
(独立し過ぎ $\leftarrow$ 適切 $\rightarrow$ 重複し過ぎ)

(2) 数学科の教職課程 (教科「情報」) の
情報通信ネットワーク区分の科目として
適切な内容だったと思いますか
(専門的過ぎ $\leftarrow$ 適切 $\rightarrow$ 概論的過ぎ)

(3) 数学科の 4 年配当の科目として
適切な内容だったと思いますか
(専門的過ぎ $\leftarrow$ 適切 $\rightarrow$ 概論的過ぎ)

期末試験のお知らせ

7月24日(木) 9:15 〜 10:45

9-252教室 (ここじゃない)

- 今日(7/17)の講義内容まで
- 学生証必携

レポート提出について

期日: 8月4日(月)20時頃まで

内容:

配布プリントのレポート問題の例のような内容、及び授業に関連する内容で、授業内容の理解または発展的な取組みをアピールできるようなもの(詳細はプリント参照のこと)

提出方法:

- 4-574室扉のレポートポスト
- 電子メイル

情報通信を行なう際の要請

- **効率的に** $\longrightarrow$ **情報理論**
- **確実に** $\longrightarrow$ **符号理論**
- **安全に** $\longrightarrow$ **暗号理論**

暗号通信

公開された情報伝達路 (盗聴可能 と仮定) で、

暗号方式を公開 して通信

- **秘密鍵暗号 (共通鍵暗号)**
- **公開鍵暗号**

秘密鍵 (共通鍵) 暗号

暗号化鍵・復号鍵が同じ

- 換字暗号・Caesar 暗号
- 線型ブロック暗号
- Vernam 暗号
- DES (Data Encryption Standard)
- AES (Advances Encryption Standard)

秘密鍵 (共通鍵) 暗号の特徴

暗号化鍵・復号鍵が同じ

- 一般に原理は簡単で高速
- 事前の鍵共有の必要
- 通信相手毎に別の鍵が必要

公開鍵暗号

暗号化鍵 (公開鍵)・復号鍵 (秘密鍵) が別

- **事前の鍵共有の必要無し**

  $\longrightarrow$

  見ず知らずの人からも送ってもらえる

- **署名機能がある**

  $\longrightarrow$ **改竄・なり済まし の対策**

  $\longrightarrow$ **否認防止 の機能も持つ**

公開鍵暗号

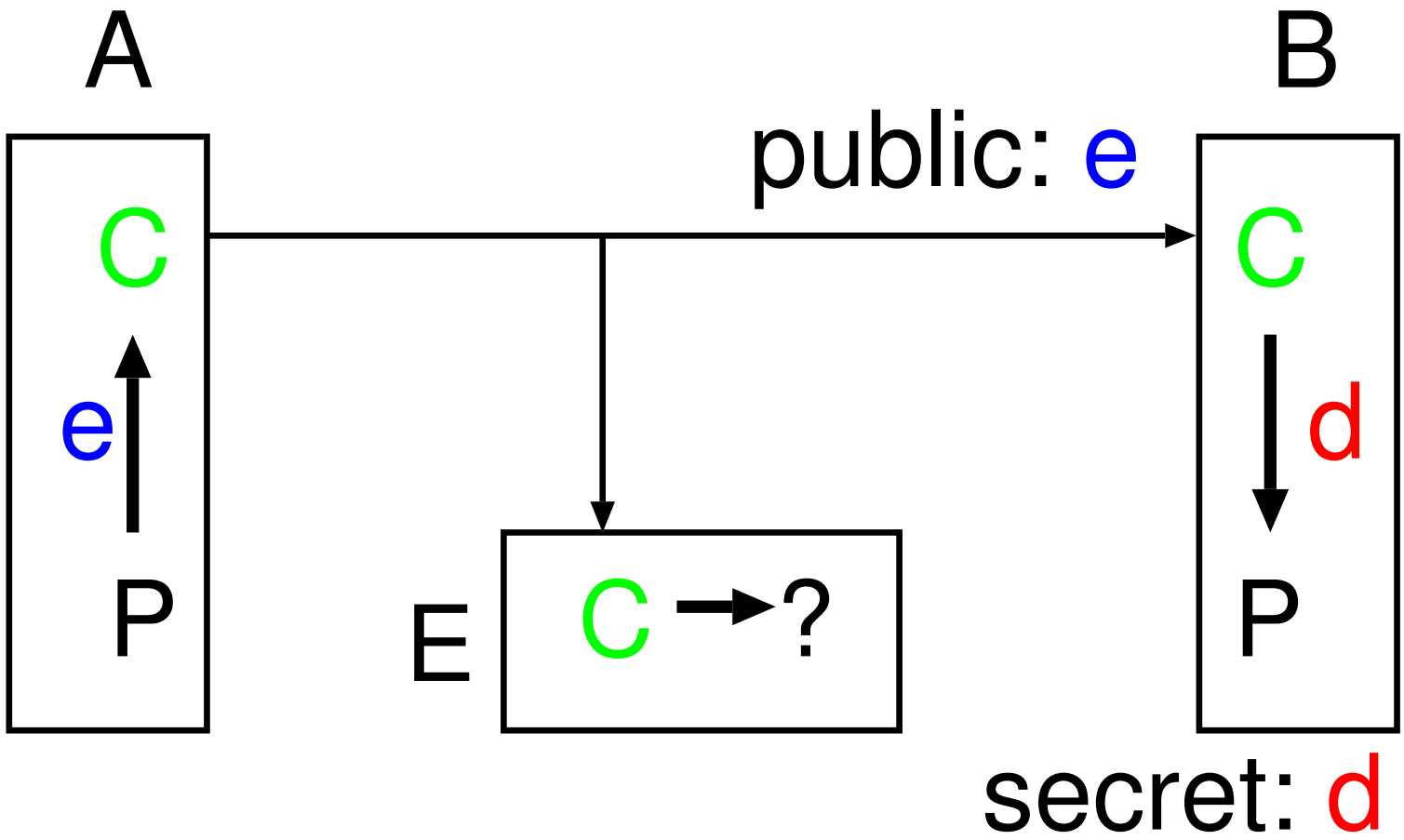
一般には、
　暗号化・復号が共通鍵暗号に比べて低速

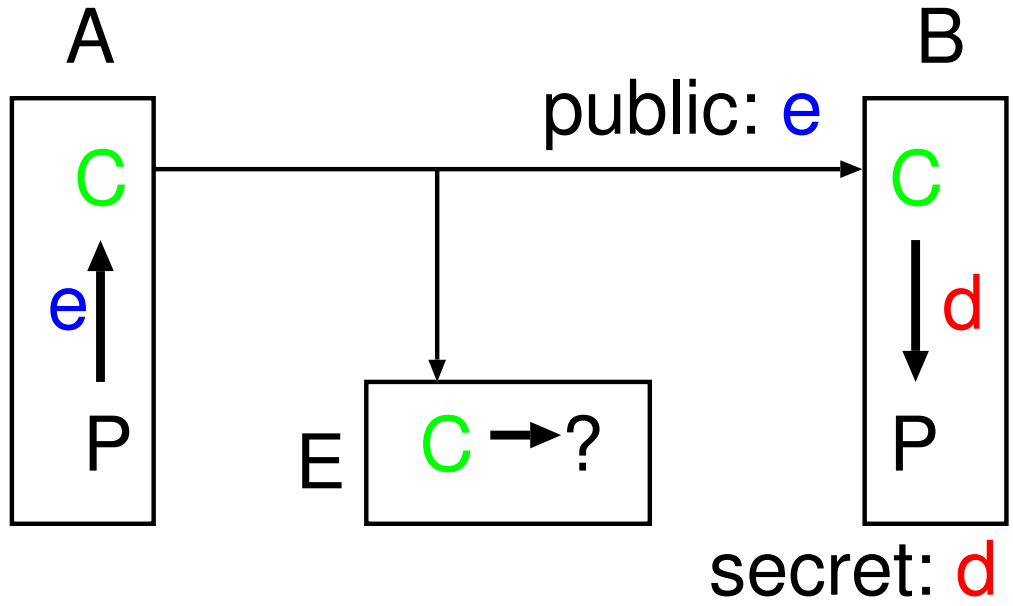
そこで、

- 始めに公開鍵暗号方式で鍵を送付・共有
- その鍵を用いて秘密鍵暗号方式で通信

というように、組合わせて用いることが多い。

公開鍵暗号による暗号通信



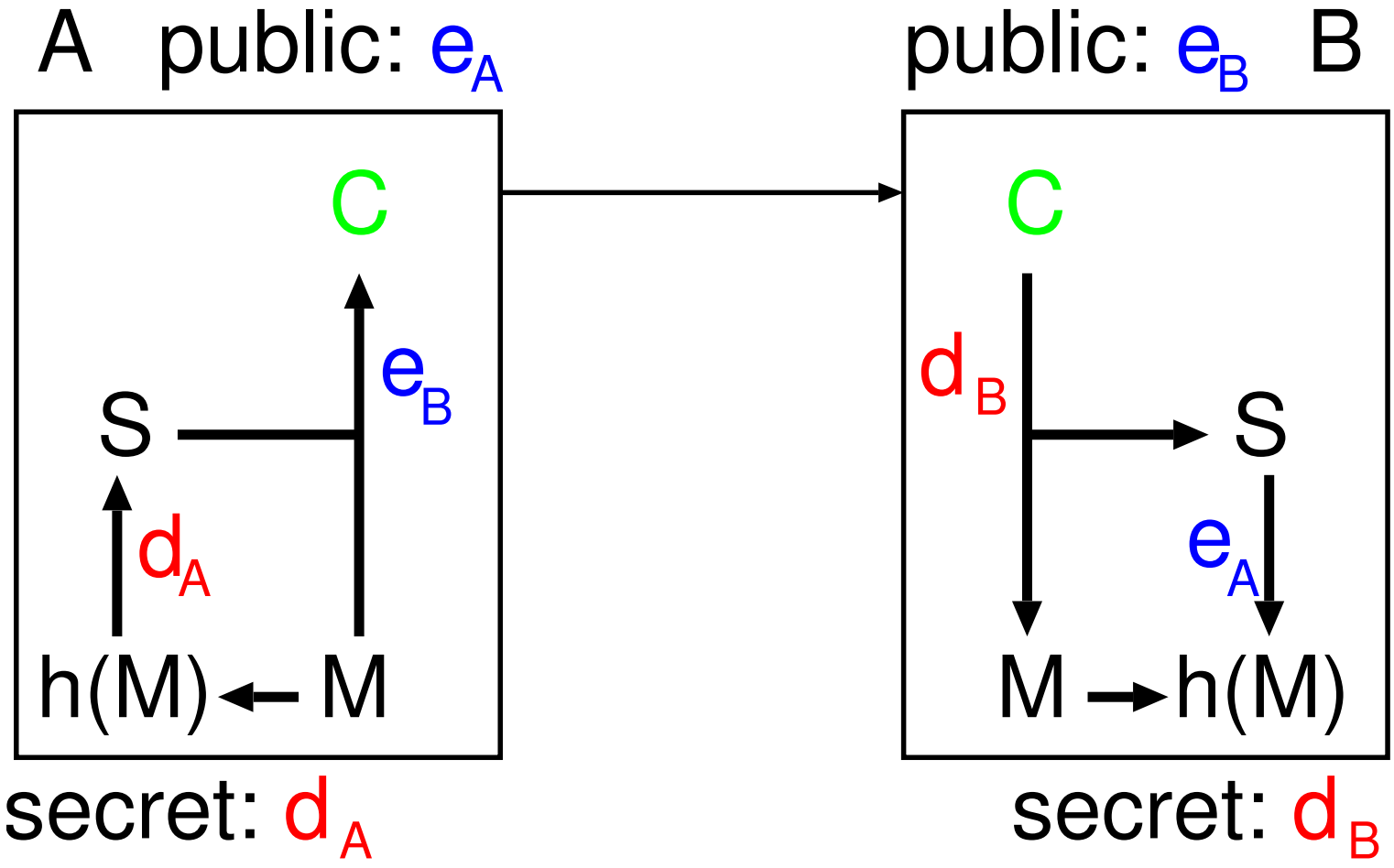


しかし、これだと誰でも暗号化できるので、

A 氏が送った保証がない。

⟶ 署名の必要性

公開鍵暗号を用いた署名



公開鍵暗号の特徴

- 暗号化は誰でも出来る
- 復号は秘密鍵を知らないと出来ない
  (もの凄く時間が掛かる)

そんな都合の良い仕組みが本当にあるのか ?

$\longrightarrow$ ある!! (多分大丈夫)

計算困難な問題 を利用
(素因数分解・離散対数問題)

代表的な公開鍵暗号方式

- **RSA 暗号 (Rivest-Shamir-Adleman)**
- **Diffie-Hellman 鍵共有**
- **ElGamal 暗号**

RSA 暗号 (Rivest-Shamir-Adleman)

p, q : **相異なる大きい素数**
(実際には現在は 512 bit 程度)

$N := pq$: **RSA 方式の法 (modulus)**

$m := \mathrm{lcm}(p-1, q-1)$

$$(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times \simeq (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times \times (\boldsymbol{Z}/q\boldsymbol{Z})^\times$$
$$\simeq \boldsymbol{Z}/(p-1)\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/(q-1)\boldsymbol{Z}$$

: 指数 m の有限アーベル群

RSA 暗号 (Rivest-Shamir-Adleman)

p, q：**相異なる大きい素数**

$N = pq, m = \mathrm{lcm}(p-1, q-1)$

e **を** $\gcd(e, m) = 1$ **となるように選ぶ**

d **を** $ed \equiv 1 \pmod{m}$ **となるように求める**

- (N, e)：**公開鍵 (暗号化鍵)**
- d：**秘密鍵 (復号鍵)**

RSA 暗号 (Rivest-Shamir-Adleman)

p, q : **相異なる大きい素数**

$$N = pq, m = \mathrm{lcm}(p-1, q-1)$$

$$ed \equiv 1 \pmod{m}$$

- (N, e) : **公開鍵 (暗号化鍵)**
- d : **秘密鍵 (復号鍵)**

平文 $M \bmod N$ **の 暗号化:** $\boxed{C = M^e \bmod N}$

暗号文 $C \bmod N$ **の 復号:** $\boxed{M = C^d \bmod N}$

公開鍵 (N, e) から秘密鍵 d が計算できるか ？

- **N の素因数分解 $N = pq$ を知っていれば容易**
- **事実上 N の素因数分解と同程度の困難さ**

「困難さ」 $\cdots$ 計算時間が掛かる

RSA 暗号の安全性 $\Longleftrightarrow$ 素因数分解の困難さ

“計算量的安全性”

計算量

入力データの大きさ (bit 長) に対する
計算の回数の オーダー で表す
(定数倍の違いは気にしない)

N **bit の入力に対し**

- $O(N^v)$: **多項式時間**
- $O(e^{vN})$: **指数時間**

計算量

素因数分解アルゴリズム等の計算量を表すのに

$$L_n[u, v] := \exp(v(\log n)^u(\log\log n)^{1-u})$$

が良く用いられる。

$N = \log n$ **(**n **の桁数) とおくと、**

- $L_n[0, v] = e^{v \log\log n} = N^v$ **：多項式時間**
- $L_n[1, v] = e^{v \log n} = e^{vN}$ **：指数時間**

素因数分解問題

現状では“準指数時間”のアルゴリズムしか知られていない

- **楕円曲線法 (Elliptic Curve Method)**
- **二次篩法 (Quadratic Sieve)**
- **数体篩法 (Number Field Sieve)**

素因数分解問題の高速なアルゴリズムの発見

$\Downarrow$

RSA 暗号の解読

しかし、逆は真とは限らない。
(解読には色々な方法があり得る)

「何で負けても負けは負け」

離散対数問題 (Discrete Logarithm Problem)

p：素数

$G := (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^{\times}$：位数 $p-1$ の巡回群

$g \bmod p \in G$：$\bmod\ p$ の原始根 ($G = \langle g \rangle$)

とするとき、

$x \bmod p \in G$ に対し、

$$\boxed{g^a \equiv x \pmod{p}}$$

となる a を求めよ。

Diffie-Hellman 鍵共有

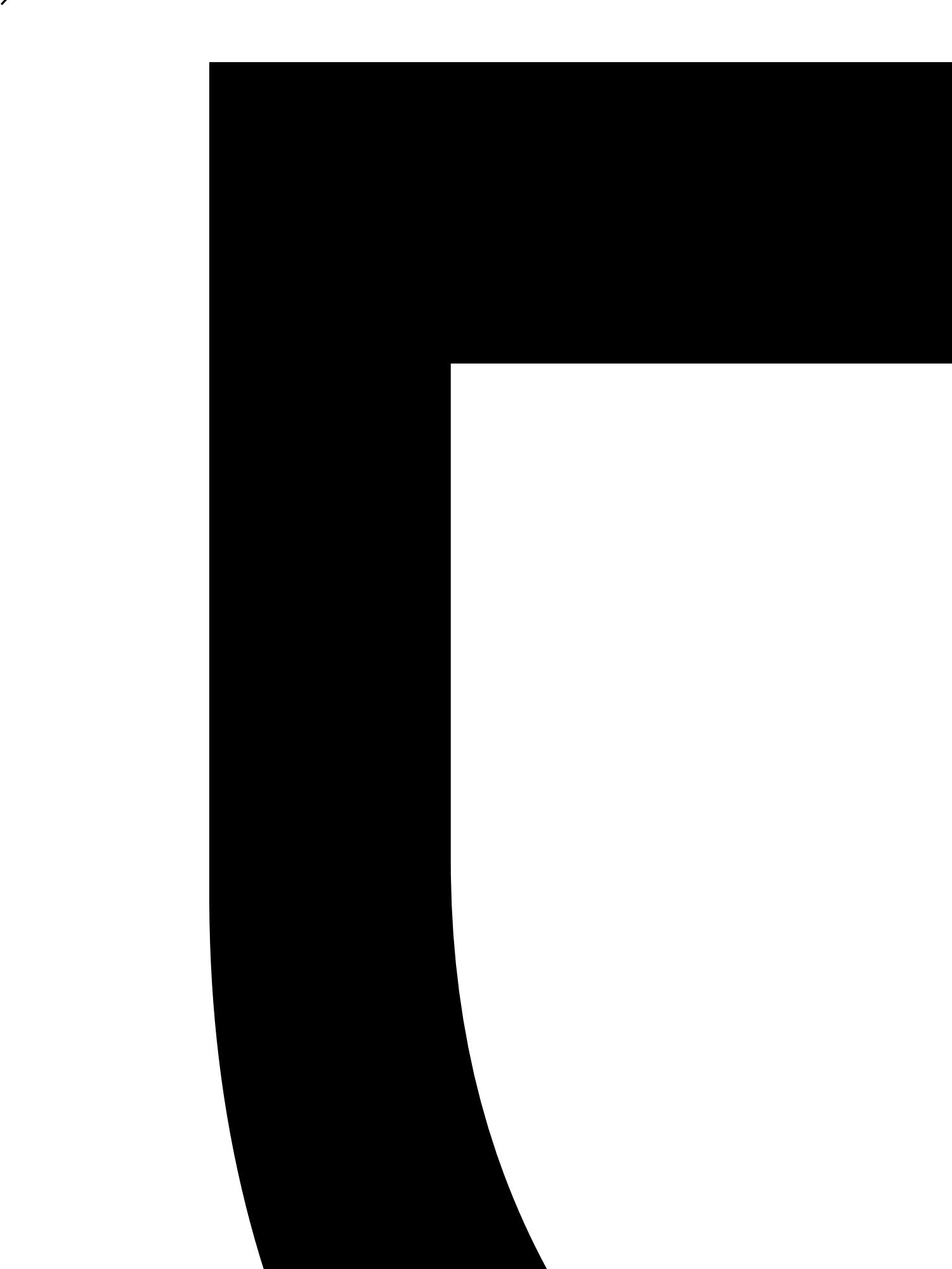
離散対数問題の困難さを利用して、

公開通信路で秘密裡に鍵共有を行なう方式

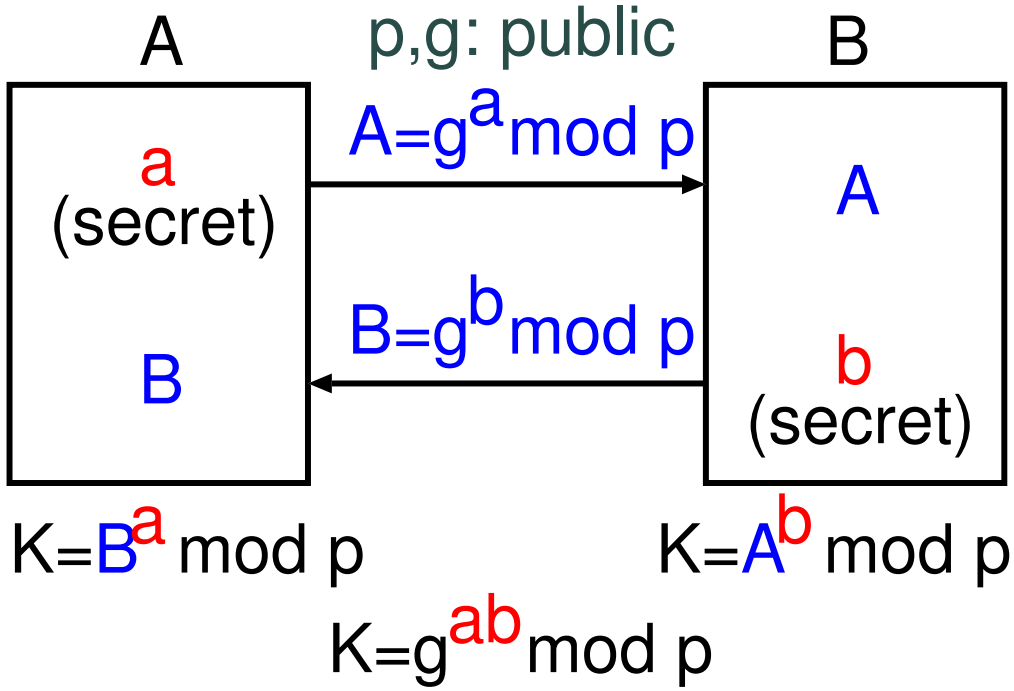
p：**素数**

$G = (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^{\times} = \langle g \rangle$：**位数** $p-1$ **の巡回群**

A・B 両氏がそれぞれランダムに a, b **を選ぶ**



Diffie-Hellman 鍵共有



(p, g, A, B) **が判っても** a, b **が判らない (DLP)**

$\longrightarrow$ **秘密鍵** K **の共有が可能**

ElGamal 暗号

離散対数問題を利用し、乱数を用いた暗号方式

p**：素数**

$G = (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^{\times} = \langle g \rangle$**：位数** $p-1$ **の巡回群**

受信者 B 氏がランダム (秘密) に b **を選び、**

$$B := g^b \bmod p \text{ を公開}$$

送信者 A 氏がランダム (秘密) に a **を選び、**

$$A := g^a \bmod p, C := B^a M \bmod p \text{ を送信}$$

ElGamal 暗号

受信者 B 氏がランダム (秘密) に b を選び、
$B := g^b \bmod p$ **を公開**

送信者 A 氏がランダム (秘密) に a を選び、
$A := g^a \bmod p,\ C := B^a M \bmod p$ **を送信**

受信者 B 氏は、 $M = (A^b)^{-1} C \bmod p$ **を計算**

ElGamal 暗号

平文 M $\longrightarrow$ **暗号文** (A, C)

- **送信データ長が** 2 **倍 (メッセージ膨張)**
- **乱数により、同じ文書が毎回異なる暗号化**

離散対数問題を利用した方式は
他の有限アーベル群でも可能

- 有限体上の楕円曲線の有理点の群
  (楕円曲線暗号)
- 有限体上の超楕円曲線の
  Jacobian の有理点の群
  (超楕円曲線暗号)
- 代数体の ideal 類群

疑似乱数

充分ランダムに 見える 長い周期の数列を
発生させるアルゴリズム

“Mersenne Twister”
· · · 現在、事実上最強のアルゴリズム