

## 11. 一変数関数の積分

11-1. 定積分の定義. 関数  $y = f(x)$  が有界閉区間  $[a, b]$  で有界であるとする。

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  : 区間  $[a, b]$  の分割  
 小区間の最大幅  $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$  を  $|\Delta|, \delta(\Delta)$  等と書く。
- $m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  : 各小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  での関数値  $f(x)$  の  
 下限・上限
- $s_\Delta := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), S_\Delta := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$
- $s := \sup_{\Delta} s_\Delta, S := \inf_{\Delta} S_\Delta$  :  $f$  の  $[a, b]$  での下積分・上積分
- $f$  が  $[a, b]$  で積分可能  $\iff s = S$   
 この時、 $s = S =: \int_a^b f(x)dx$  :  $f$  の  $[a, b]$  での定積分
- (Darboux の定理)  $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$  : 分割の列で、 $|\Delta_n| \rightarrow 0$  とする。この時、  
 $s_{\Delta_n} \rightarrow s, S_{\Delta_n} \rightarrow S$  ( $n \rightarrow \infty$ )。
- $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  : 各小区間から代表点を1つつつ選んだもの ( $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ )  
 $I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  : Riemann 和
- $f$  が  $[a, b]$  で積分可能  $\iff \exists \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ 。この時、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)dx$

11-2. 積分の基本性質.

- 区間に関する加法性 :  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- 線型性:  $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- 単調性 :  $[a, b]$  で  $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

11-3. 不定積分. 定積分関数  $\int_a^x f(t)dt$  に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に  $\int f(x)dx$  と書く。... 不定積分

11-4. 微分積分学の基本定理.  $f$  が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

即ち、不定積分 = 原始関数 (微分すると  $f$  になる関数)。... 微分法と積分法との邂逅!!  
 又、 $F$  を  $f$  の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \left( = \left[ F(x) \right]_a^b \text{ と書く} \right)$$

11-5. 広義積分 (変格積分). 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- $f$ : 区間  $[a, b]$  (resp.  $(a, b]$ ) の上端  $b$  (resp. 下端  $a$ ) の近くで有界でない場合  

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- $f$ : 区間  $[a, +\infty)$  (resp.  $(-\infty, b]$ ) で定義されている場合  

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^b f(x)dx$$
- $f$ : 区間  $[a, b]$  の内点  $c$  の近くで有界でない場合  
 積分区間を  $[a, c), (c, b]$  に分けて、それぞれ考えよ。
- $f$ : 積分区間の両端  $a, b$  で広義積分の場合 ( $a, b$  の近くで有界でないか、 $a, b = \pm\infty$ )  
 適当な点  $c$  で積分区間を  $(a, c], [c, b)$  に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例  

$$\star \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$

$$\star \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$
- 判定法 (簡単な場合)  

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

11-6. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し  $c > 0$ )

- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx : \begin{cases} n = 1 \text{ なら } \log|x-a| \\ n \geq 2 \text{ なら } -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \end{cases}$
- $\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n} dx$ : 変数変換  $\sqrt{c}t = x+b, \sqrt{c}dt = dx$  で  $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$  に帰着  
 $\rightarrow \begin{cases} n = 1 \text{ なら } \arctan t \\ n \geq 2 \text{ なら 部分積分で } n-1 \text{ の場合に帰着} \end{cases}$
- $\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n} dx$ : 変数変換  $t = (x+b)^2+c, dt = 2(x+b)dx$  で  $\int \frac{dt}{t^n}$  に帰着

11-7. 冪根 (平方根など) を含む積分. 不定積分 (原始関数) が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$  の有理式の積分  
 $\rightarrow$  変数変換  $y^n = ax+b, ny^{n-1}dy = adx$  で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$  ( $\sqrt{1}$  次式 2 種類) の有理式の積分  
 $\rightarrow$  変数変換  $y^2 = ax+b, 2ydy = adx$  で  $\sqrt{2}$  次式の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$  の有理式の積分  
 $\rightarrow y^2 = ax^2+bx+c$  上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3}$  次以上の多項式の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。  
 ( $\sqrt{3}$  次式又は 4 次式 の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。)

11-8. 三角関数の有理関数の積分.  $t = \tan \frac{x}{2}$  と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。  
 足立恒雄「類体論へ至る道」より