2008年度春期

数学B(微分積分)

(物質生命理工学科１クラス)

↑ クラス分けに注意

数学IN　(化学科)

(担当: 角皆)

数学の分野(手法)	解析学(無限小解析)	代数学
理工学の大学初年級では	微分積分	線型代数
本学理工学部 1 年次では	数学 B(微分積分) 微分方程式の基礎 ベクトル解析の基礎	数学 A(線型代数)
標語的には	不等式の数学	等式の数学

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は 高校までは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

例: 2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$
$$(x-2)(x-5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例: 2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

例: 2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x-2)(x-5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例: 2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、
動作は等式の扱いと同様であった。

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか ?

収束・発散・極限などなど、
それも

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

など

収束・発散・極限などなど、
それも

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

など

と言っても難しいことではない。

使うことはこの程度。

- **推移律:** $x \le y, y \le z \Longrightarrow x \le z$
- **演算との関係:**
  - $\star\ x \le y \Longrightarrow x + a \le y + a$
  - $\star\ a > 0, x \le y \Longrightarrow ax \le ay$
- **三角不等式:** $|x + y| \le |x| + |y|$

と言っても難しいことではない。

使うことはこの程度。

- **推移律:** $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
- **演算との関係:**
  - $\star\ x \leq y \Longrightarrow x + a \leq y + a$
  - $\star\ a > 0, x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay$
- **三角不等式:** $|x + y| \leq |x| + |y|$

問 1:
縦が大体 20cm**、横が大体** 30cm **の長方形の紙がある。従って、面積は大体**

$$20 \times 30 = 600\mathrm{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が $1\mathrm{cm}^2$ **未満**

であると言うためには、縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

真の縦の長さを $(20+x)$ cm、

真の横の長さを $(30+y)$ cm、

誤差が δ cm **未満とすると、**

$$0 \leq |x| < \delta, \qquad 0 \leq |y| < \delta.$$

$$0 \leq |x| < \delta, \qquad 0 \leq |y| < \delta$$

$$\begin{aligned} |(20+x)(30+y) - 600| &= |30x + 20y + xy| \\ &\leq 30|x| + 20|y| + |x||y| \\ &< 30\delta + 20\delta + \delta^2 \\ &= 50\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

となれば良い。

2 **次不等式**

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

を解くのは大変だ。

- **誤差の限界** δ **が大きい時は興味がない**
- **ぎりぎりを狙う必要はない**

$\longrightarrow$ **例えば**

$\delta < 1$ **という条件付きで考えれば良い。**

2 次不等式

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

を解くのは大変だ。

- 誤差の限界 δ が大きい時は興味がない
- ぎりぎりを狙う必要はない

$\longrightarrow$ 例えば

$\delta < 1$ という条件付きで考えれば良い。

2 次不等式

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

を解くのは大変だ。

- 誤差の限界 δ が大きい時は興味がない
- ぎりぎりを狙う必要はない

$\longrightarrow$ 例えば

$\delta < 1$ という条件付きで考えれば良い。

そこで、

$$\delta < 1$$

<u>とする</u>。すると、

$$\begin{aligned} 50\delta + \delta^2 &< 50\delta + \delta \\ &= 51\delta \\ &< 100\delta \end{aligned}$$

であるから、

$$100\delta < 1$$

となれば良い。

これより、

$$\delta < \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した

$$\delta < 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta < \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

であれば良い。従って、縦横の長さの誤差は

$$0.01\mathrm{cm} \text{ 未満}$$

であれば良い。

さっき

$$\delta < 1$$

としたときに、

$$50\delta + \delta^2 < 50\delta + 1$$

とすることも出来たが、これだと

$$50\delta + 1 < 1$$

としなければならなくて困る。

そこで、もう少し厳しく、

$$\delta < \frac{1}{2} = 0.5$$

としておけば、

$$50\delta + \delta^2 < 50\delta + \frac{1}{4}$$

なので、

$$50\delta + \frac{1}{4} < 1$$

であれば良い。これより、

$$50\delta < \frac{3}{4}$$

$$\delta < \frac{3}{200} = 0.015$$

で、さっきの仮定 $\delta < 0.5$ **と併せて、**

$$\delta < \min\{0.5, 0.015\} = 0.015$$

であれば良い。従って、縦横の長さの誤差は

0.015cm **未満**

であれば良い。

縦横の長さの誤差が

- $0.01\mathrm{cm}$ **未満であれば良い。**
- $0.015\mathrm{cm}$ **未満であれば良い。**

どっちが正解？

$\longrightarrow$ **どっちも正解!!**

縦横の長さの誤差が

- $0.01\mathrm{cm}$ **未満であれば良い。**
- $0.015\mathrm{cm}$ **未満であれば良い。**

どっちが正解？

$\longrightarrow$ **どっちも正解!!**

勿論、

もっと精密な限界が知りたければ／必要ならば、

2 **次不等式**

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

を解けばよい／解かねばならない。