

2008 年度春期

数学 B(微分積分)
(物質生命理工学科1クラス)
↑ クラス分けに注意

数学 IN (化学科)

(担当: 角皆)

数学の分野 (手法)	解析学 (無限小解析)	代数学
理工学の 大学初年級 では	微分積分	線型代数
本学 理工学部 1年次 では	数学 B(微分積分) 微分方程式の基礎 ベクトル解析の基礎	数学 A (線型代数)
標語的には	不等式の数学	等式の数学

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

例: 2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x - 2)(x - 5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例: 2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、
動作は等式の扱いと同様であった。

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか？

収束・発散・極限などなど、
それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (estimate)

など

と言っても難しいことではない。

使うことはこの程度。

- 推移律: $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$
- 演算との関係:
 - ★ $x \leq y \implies x + a \leq y + a$
 - ★ $a > 0, x \leq y \implies ax \leq ay$
- 三角不等式: $|x + y| \leq |x| + |y|$

問 1:

縦が大体 20cm、横が大体 30cm の長方形の紙がある。従って、面積は大体

$$20 \times 30 = 600\text{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が 1cm^2 未満

であると言うためには、縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

真の縦の長さを $(20 + x)$ cm、

真の横の長さを $(30 + y)$ cm、

誤差が δ cm 未満とすると、

$$0 \leq |x| < \delta, \quad 0 \leq |y| < \delta.$$

$$0 \leq |x| < \delta, \quad 0 \leq |y| < \delta$$

$$\begin{aligned} |(20+x)(30+y) - 600| &= |30x + 20y + xy| \\ &\leq 30|x| + 20|y| + |x||y| \\ &< 30\delta + 20\delta + \delta^2 \\ &= 50\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

となれば良い。

2次不等式

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

を解くのは大変だ。

- 誤差の限界 δ が大きい時は興味がない
- ぎりぎりを狙う必要はない

→ 例えば

$\delta < 1$ という条件付きで考えれば良い。

そこで、

$$\delta < 1$$

とする。すると、

$$\begin{aligned}50\delta + \delta^2 &< 50\delta + \delta \\ &= 51\delta \\ &< 100\delta\end{aligned}$$

であるから、

$$100\delta < 1$$

となれば良い。

これより、

$$\delta < \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した

$$\delta < 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta < \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

であれば良い。従って、縦横の長さの誤差は

0.01cm 未満

であれば良い。

さっき

$$\delta < 1$$

としたときに、

$$50\delta + \delta^2 < 50\delta + 1$$

とすることも出来たが、これだと

$$50\delta + 1 < 1$$

としなければならなくて困る。

そこで、もう少し厳しく、

$$\delta < \frac{1}{2} = 0.5$$

としておけば、

$$50\delta + \delta^2 < 50\delta + \frac{1}{4}$$

なので、

$$50\delta + \frac{1}{4} < 1$$

であれば良い。これより、

$$50\delta < \frac{3}{4}$$
$$\delta < \frac{3}{200} = 0.015$$

で、さっきの仮定 $\delta < 0.5$ と併せて、

$$\delta < \min\{0.5, 0.015\} = 0.015$$

であれば良い。従って、縦横の長さの誤差は
0.015cm 未満

であれば良い。

縦横の長さの誤差が

- 0.01cm 未満であれば良い。
- 0.015cm 未満であれば良い。

どっちが正解？

→ **どっちも正解 !!**

勿論、

もっと精密な限界が知りたければ / 必要ならば、

2次不等式

$$50\delta + \delta^2 < 1$$

を解けばよい / 解かねばならない。