# 前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

## 本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

# 「不等式の数学」とは？

**収束・発散・極限などなど、それも**

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

**など**

**問** 1**:**

**縦が大体** 20cm**、横が大体** 30cm **の長方形の紙がある。従って、面積は大体**

$$20 \times 30 = 600\mathrm{cm}^2$$

**である。さて、**

**面積の誤差が** $1\mathrm{cm}^2$ **未満**

**であると言うためには、縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。**

**真の縦の長さを** $(20+x)$ cm、
**真の横の長さを** $(30+y)$ cm、
**誤差が** $\delta$ cm **未満とすると、**

$$0 \le |x| < \delta, \qquad 0 \le |y| < \delta.$$

$$\begin{aligned} |(20+x)(30+y)-600| &= |30x+20y+xy| \\ &\le 30|x|+20|y|+|x||y| \\ &< 50\delta+\delta^2. \end{aligned}$$

**従って、**$50\delta+\delta^2<1$ **となれば良い。**

ここで、(例えば) $\delta < 1$ とする。すると、

$$50\delta + \delta^2 < 50\delta + \delta < 100\delta$$

であるから、$100\delta < 1$ となれば良い。これより

$$\delta < \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta < 1$ とを共に満たせば良いので、

$$\delta < \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

であれば良い。従って、縦横の長さの誤差は

$$0.01\mathrm{cm}\ 未満$$

であれば良い。 (以上復習)

さて、
(詳しく見るために) 少し問題を単純にして、

**問** $2$**:**

**一辺が大体** $2\mathrm{cm}$ **の正方形**

**(従って面積は大体** $4\mathrm{cm}^2$**) で、**

**面積の誤差を** $0.1\mathrm{cm}^2$ **未満にしたければ、**

**一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。**

**更に問題を単純にして、**

**一辺の長さは縦横ともに $(2+h)$ cm とし、**

**誤差は $\delta$ cm 未満**

**(つまり $|h| < \delta$) としよう。**

$$\begin{aligned} |(2+h)^2 - 4| &= |4h + h^2| \\ &\leq 4|h| + |h|^2 \\ &< 4\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

**この後は前回のように $\cdots\cdots$**

**問 $2'$:**

**関数 $f(x) = x^2$ において、**
**$x$ を $2$ に近付けると $f(x)$ は $4$ に近付くが、**
**その誤差について、**

$$|f(x) - 4| < 0.1$$

**となるためには、**
**$x$ をどの程度 $2$ に近付ければ良いか**
**($|x - 2| < \delta$ なら大丈夫と言えるためには、**
**$\delta$ の値をどれくらいにすれば良いか)。**

**($x = 2 + h$ と置くと判り易い。)**

**今までは、誤差の限界が設定されていて、**

**その値以内に収めようとしてきたが、**

**今の場合、原理的には、**

**どんなに厳しい限界に対しても、**

**同様の議論が可能。**

$\longrightarrow$ **誤差の限界が** $0.0001\mathrm{cm}^2$ **だったら？**

$\longrightarrow$ **より一般に、**
**誤差の限界を** $\varepsilon\ \mathrm{cm}^2$ **とすると？**

**これは何をやっているかと言うと、**

**$h$ が充分 $0$ に近ければ、**

**$(2+h)^2$ は充分 $4$ に近い**

**ということを言っている。**

**$x$ が充分 $2$ に近ければ、$x^2$ は充分 $4$ に近い**

**と言っても良い。**

**これが**

$$\lim_{h \to 0} (2+h)^2 = 4$$

**或は**

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

**の実質的な意味内容なのであった !!**

**次のお話**

**問** $3$**:**

**或る実験での測定値が大体** $a$ **くらいで、**

**誤差は** $\delta$ **未満だという。**

**この実験を** $10$ **回行ない、**

**測定値の平均を取ったら、**

**誤差はどれ程と言えるか。**

**各回の測定値を** $a_i$ **とし、**

**誤差が** $x_i$ **とせよ (**$i = 1, \ldots, 10$**)。**

$$|a_i - a| = |x_i| < \delta,$$

**従って、**

$$a - \delta < a_i < a + \delta.$$

$i = 1, \ldots, 10$ **について辺々加えて、**

$$10(a - \delta) < \sum_{i=1}^{10} a_i < 10(a + \delta)$$

**これより、**

$$a - \delta < \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} < a + \delta$$

**従って、**

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} - a \right| < \delta$$

$\longrightarrow$ 10 **回測定しても誤差は同じ？**

**これより、**

$$a - \delta < \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} < a + \delta$$

**従って、**

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} - a \right| < \delta$$

$\longrightarrow 10$ **回測定しても誤差は同じ？**

**実際には、**

**誤差がランダムに出るとすれば、**

**打ち消し合って精度が上がるであろう。**

- **統計学の問題 ($\longrightarrow$ 数学 C(確率統計))**
- **実験学の問題**

**以上のような「不等式の取扱い」を用いて、**

**「収束」「発散」「極限」などについて、**

**詳しく調べていこう。**

## 「極限」

**良く判らないものを、**

**良く判るもので近似する。**

| | | |
|---|---|---|
| **無限** | $\longrightarrow$ | **有限** |
| **連続量**<br>**(analog)** | $\longrightarrow$ | **離散量**<br>**(digital)** |

## 「極限」

**良く判らないものを、**

**良く判るもので近似する。**

| | | |
|---|---|---|
| **無限** | $\longleftrightarrow$ | **有限** |
| **連続量**<br>**(analog)** | $\longleftrightarrow$ | **離散量**<br>**(digital)** |

## 等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

## 逆に見ると、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

**関数を「多項式の極限」として表すこと**

**(冪級数・整級数)**

**一般に、**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}
$$

**と表すことを考えよう。**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**

**一般に、**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}
$$

**と表すことを考えよう。**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**