

前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (estimate)

など

問 1:

縦が大体 20cm、横が大体 30cm の長方形の紙がある。従って、面積は大体

$$20 \times 30 = 600\text{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が 1cm^2 未満

であると言うためには、縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

真の縦の長さを $(20 + x)$ cm、
真の横の長さを $(30 + y)$ cm、
誤差が δ cm 未満とすると、

$$0 \leq |x| < \delta, \quad 0 \leq |y| < \delta.$$

$$\begin{aligned} |(20 + x)(30 + y) - 600| &= |30x + 20y + xy| \\ &\leq 30|x| + 20|y| + |x||y| \\ &< 50\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、 $50\delta + \delta^2 < 1$ となれば良い。

ここで、(例えば) $\delta < 1$ とする。すると、

$$50\delta + \delta^2 < 50\delta + \delta < 100\delta$$

であるから、 $100\delta < 1$ となれば良い。これより

$$\delta < \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta < 1$ とを共に満たせば良いので、

$$\delta < \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

であれば良い。従って、縦横の長さの誤差は

0.01cm 未満

であれば良い。

(以上復習)

さて、
(詳しく見るために) 少し問題を単純にして、

問 2:

一辺が大体 2cm の正方形

(従って面積は大体 4cm^2) で、

面積の誤差を 0.1cm^2 未満にしたければ、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、
一辺の長さは縦横ともに $(2 + h)$ cm とし、
誤差は δ cm 未満
(つまり $|h| < \delta$) としよう。

$$\begin{aligned} |(2 + h)^2 - 4| &= |4h + h^2| \\ &\leq 4|h| + |h|^2 \\ &< 4\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

この後は前回のように ……

問 2':

関数 $f(x) = x^2$ において、
 x を 2 に近づけると $f(x)$ は 4 に近づくが、
その誤差について、

$$|f(x) - 4| < 0.1$$

となるためには、
 x をどの程度 2 に近づければ良いか
($|x - 2| < \delta$ なら大丈夫と言えるためには、
 δ の値をどれくらいにすれば良いか)。

($x = 2 + h$ と置くと判り易い。)

今までは、誤差の限界が設定されていて、
その値以内に収めようとしてきたが、
今の場合、原理的には、
どんなに厳しい限界に対しても、
同様の議論が可能。

→ 誤差の限界が 0.0001cm^2 だったら？

→ より一般に、
誤差の限界を $\varepsilon \text{ cm}^2$ とすると？

これは何をやっているかと言うと、

h が充分 0 に近ければ、

$(2+h)^2$ は充分 4 に近い

ということを行っている。

x が充分 2 に近ければ、 x^2 は充分 4 に近い

と言っても良い。

これが

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h)^2 = 4$$

或は

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

の実質的な意味内容なのであった !!

次のお話

問 3:

或る実験での測定値が大体 a くらいで、
誤差は δ 未満だという。

この実験を 10 回行ない、
測定値の平均を取ったら、
誤差はどれ程と言えるか。

各回の測定値を a_i とし、

誤差が x_i とせよ ($i = 1, \dots, 10$)。

$$|a_i - a| = |x_i| < \delta,$$

従って、

$$a - \delta < a_i < a + \delta.$$

$i = 1, \dots, 10$ について辺々加えて、

$$10(a - \delta) < \sum_{i=1}^{10} a_i < 10(a + \delta)$$

これより、

$$a - \delta < \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} < a + \delta$$

従って、

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} - a \right| < \delta$$

→ 10回測定しても誤差は同じ？

実際には、

誤差がランダムに出るとすれば、

打ち消し合って精度が上がるであろう。

- 統計学の問題 (→ 数学 C(確率統計))
- 実験学の問題

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

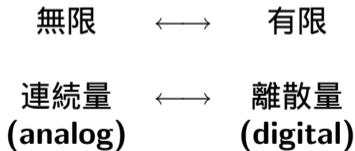
「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう。

「極限」

良く判らないものを、

良く判るもので近似する。



等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

逆に見ると、

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)\end{aligned}$$



関数を「多項式の極限」として表すこと

(冪級数・整級数)

一般に、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう。

→ 係数 $a_n = ?$